

6. FOLGE, ^{die} 1950, BAND 8, HEFT 3-4

UNIVERSITY
OF MICHIGAN

FEB 19 1951

PHYSICS
LIBRARY

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 443. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, A. SOMMERFELD, W. WEIZEL

Herausgegeben von

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 10. November 1950

Inhalt

	Seite
H. Neuert und J. Geerk, Weil/Rh.: Über das Verhalten von Zählrohren mit NH_3 -Füllung. (Mit 2 Abbildungen).....	93
R. Adolph, H. O. Kneser und I. Schulz, Braunschweig: Die Eigenfrequenzen zylindrischer Stahlstäbe. (Mit 7 Abbildungen).....	99
H. Falkenhagen und H. Jacob, Rostock: Bemerkungen zur Theorie der Elektrostriktion in Onsager-Flüssigkeiten.....	105
H. Lehmann, Jena: Zur Regularisierung der klassischen Elektrodynamik ...	109
Friedrich Lenz, Düsseldorf: Annäherung von rotationssymmetrischen Potentialfeldern mit zylindrischen Äquipotentialflächen durch eine analytische Funktion. (Mit 3 Abbildungen).....	124
Karl Försterling und Hans-Otto Wüster, Köln: Über die Reflexion in einem inhomogenen Medium.....	129
Herbert Bock, Rostock: Über die Wärmeleitung von Gasgemischen. (Mit 5 Abbildungen).....	134
Detlof Lyons, Berlin: Diffusion thermischer Neutronen. (Exakte Theorie mit Berücksichtigung der Anisotropie der Einzelstreuung.) (Mit 3 Abbildungen).....	156
H. Dänzer, Mainz a. Rh.: Zur Theorie des Schrot- und Johnson-Effektes. (Mit 3 Abbildungen).....	176
Walter Heywang, Würzburg: Reflexionseffekte bei der nichtlinearen Theorie der Supraleitung. (Mit 2 Abbildungen).....	187
Karl Hauffe, Greifswald: Fehlordnungserscheinungen und Platzwechselvorgänge in elektronenleitenden Mischphasen. (Mit 7 Abbildungen).....	201
H. Epheser und T. Schlomka, Hannover: Flächengrößen und elektrodynamische Grenzbedingungen bei bewegten Körpern. (Mit 2 Abbildungen)	211
Erich Kretschmann, Halle (Saale): Nachtrag zu meiner „Bemerkung zur klassischen Elektronentheorie“, Ann. Physik (6) 4, 331—334 (1949)	220

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Möglich, (1) Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, einzusenden.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM. 34.— zuzügl. Postgebühren. Einzelpreis dieses Heftes DM 10.20.

Erfahrungen und Theorien über Licht und Elektron

Von Prof. Dr. J. Stark

I. Die Ausbreitung des Lichtes - II. Aufnahme und Abgabe von Lichtenergie durch das einzelne Elektron - III. Das elektromagnetische Feld des Lichtkörperchens - IV. Struktur des Elektrons - V. Bewegungszustände des Atomelektrons - VI. Struktur der Atomhülle - VII. Arbeitsweisen zur Gewinnung von Entdeckungen und neuen Erkenntnissen.

101 Seiten mit 12 Photographien Preis 3.— DM

VERLAG G. H. STIFEL - TRAUNSTEIN (OBB.)

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 8, HEFT 3-4 * 1950

Über das Verhalten von Zählrohren mit NH_3 -Füllung

Von H. Neuert und J. Geerk

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Der Entladungsmechanismus in NH_3 -Zählern ist wie bei den reinen Dampf-Zählern weitgehend durch das hohe Absorptionsvermögen der Gasfüllung für die in der Entladung gebildeten Photonen bestimmt. Nach 10^7 – 10^8 Stößen bildet sich auf der Kathode eine lichtempfindliche Schicht. Bei massenspektrometrischen Untersuchungen des Füllgases wird nach hohen Stoßzahlen ein beträchtlicher Anteil an N_2 und H_2 gefunden. Diese Gase entstehen in diesem speziellen Falle als Folge von chemischen Reaktionen, die durch bei der Dissoziation durch Elektronenstoß oder Photonen aus der Entladung entstehende H-Atome ausgelöst werden. Da ein Teil dieser chemischen Reaktionen aber wieder auf NH_3 zurückführt, ist die Lebensdauer von NH_3 -Zählern größer als bei den meisten anderen Zählern mit Dampfzusatz.

Einleitung

Für die Brauchbarkeit eines Zählrohrs bei stärkerer Beanspruchung ist hauptsächlich die Gasfüllung verantwortlich. Die Grenze der Brauchbarkeit, d. h. die Lebensdauer ist bei Zählern mit Gas + Dampf-Füllung zum Teil durch den allmählichen Verbrauch des Dampfanteils infolge Dissoziation während der Entladungen gegeben. In vielen Fällen kann man eine größere Lebensdauer dadurch bewirken, daß man die Zählrohre unterhalb der Auslösespannung, z. B. im beschränkten Proportionalbereich betreibt, wodurch der Dampfverbrauch pro Einzelentladung wesentlich verringert wird. Besonders vorteilhaft lassen sich auf diese Weise Zählrohre mit reiner Dampffüllung verwenden¹⁾, da die Impulsgröße hier mit abnehmender Spannung weit weniger rasch absinkt als im Falle der Gemisch-Zähler. Hiervon hat bereits Trost²⁾ bei der Messung hoher Intensitäten mit Zählrohren (mit Methylal-Füllung) Gebrauch gemacht.

Eine gute Lebensdauer könnte man von Zählrohren erwarten, bei denen auch die Dissoziationsprodukte noch gute selbstlöschende Eigenschaften aufweisen, oder bei denen die Dissoziationsprodukte sich zum Ausgangsmolekül rekombinieren. Nach Versuchen von Korff und Krumbein³⁾ scheinen derart günstige Verhältnisse bei NH_3 -Zählern vorzuliegen. Nach ihren Beobachtungen waren nach $3 \cdot 10^{10}$ Stößen noch immer brauchbare Zähleigenschaften vorhanden. Dieses Verhalten wurde von den Autoren auf Haber-Bosch-Prozesse der Resyntheti-

¹⁾ E. Fünfer u. H. Neuert, Z. angew. Physik **2**, 241 (1950).

²⁾ A. Trost, Z. Physik **117**, 257 (1941).

³⁾ S. A. Korff u. A. D. Krumbein, Physic. Rev. **76**, 1412 (1949).

sierung der Dissoziationsprodukte des NH_3 zurückgeführt. Allerdings wurde bei mehr als 10^8 Stößen eine beträchtliche Lichtempfindlichkeit der Zähler beobachtet. Man kann daher vermuten, daß sich doch irgendwelche Vorgänge im Zählrohr abspielen, bei denen schließlich diese lichtempfindliche Schicht entsteht und bei denen aber auch die Gaszusammensetzung eine allmähliche Änderung erfährt. Da die genannte Lebensdauer im Vergleich zu der vieler anderer Zähler beträchtlich ist, erschien es interessant und möglicherweise für die Zählrohrtechnik wichtig, das Verhalten von NH_3 -Zählern näher zu studieren.

Amplitudenkurve

Zur Durchführung der Versuche wurde trockenes NH_3 in Zählrohre der üblichen Bauart (etwa 16 mm innerer \varnothing ; 0,15 mm Stahldraht) geleitet. Als Kathodenmaterial wurde Cu, Ms oder Ni verwendet. Es wurden keine wesentlichen Unterschiede im Verhalten der Zähler bei verschiedenem Kathodenmaterial beobachtet.

Zunächst wurde die Abhängigkeit der Stromimpuls-Amplitude bei solchen Zählern von der Spannung untersucht. Die Meßmethode ist bereits früher beschrieben worden¹⁾. In Anlehnung an diese Versuche wurde bei den Messungen im allgemeinen ein Arbeitswiderstand von 1 kOhm verwendet.

Abb. 1 zeigt die so gefundenen Amplitudenkurven für α - und β, γ -Strahlen eines Radiumpräparats für einen Messingzähler von 20 mm wirksamer Länge bei einem Gasdruck von 100 mm NH_3 . Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven für eine Füllung des gleichen

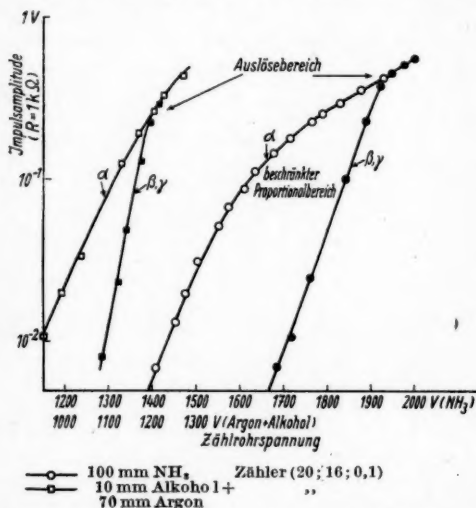


Abb. 1. Amplitudenkurve bei einem NH_3 -Zähler im Vergleich mit einem Ar + Alkohol-Zähler

Zählers mit 10 mm Äthylalkohol + 70 mm Argon aufgetragen. Die Amplitudenkurven des NH_3 haben durchaus den von den reinen Dämpfen her bekannten Charakter. Wie bei den reinen Dämpfen ist also auch hier der Entladungsmechanismus weitgehend bestimmt durch die starke Absorption im Gas der in der Entladung entstehenden Photonen. Die Kurve für α -Teilchen bleibt in dem offenbar im beschränkten Proportionalbereich liegenden Spannungsbereich mit zunehmender Spannung infolge des wachsenden Raumladungseinflusses immer mehr hinter einem rein exponentiellen Anstieg zurück. Im Vergleich zu den Kurven für Argon + Alkohol liegen beide Kurven erheblich flacher, wie das allgemein für reine Dampf-Füllungen früher gefunden worden ist. Bei höheren Spannungen tritt offensichtlich ein Auslösebereich auf. Der Beginn desselben,

charakterisiert durch den Vereinigungspunkt von α - und β -Kurve, liegt offenbar bei etwa der gleichen Amplitude wie beim Argon + Alkohol-Zähler.

Zählbereich

Wie die Betrachtung der Stöße auf dem Oszillographen zeigt, sind beim NH_3 -Zähler die Impulshöhen im Auslösebereich zunächst wesentlich weniger einheitlich, ähnlich dem Falle der Impulse von Zählrohren mit reiner oder wenigstens überwiegender Dampf-Füllung. Es kommt hier wahrscheinlich zur Ausbildung von Ionenschläuchen, die sich aber nicht immer über den ganzen Draht erstrecken, vielmehr nach einer gewissen Strecke löschen und damit unterschiedliche Impulsgrößen hervorrufen. Erst bei etwas größeren Überspannungen wird die Impulshöhe einheitlich. Diese Verhältnisse machen sich bei der Messung des Zählbereichs bemerkbar. Bei normaler Empfindlichkeit des Verstärkers (einige Zehntel Volt) beträgt der Zählbereich nur 30–50 Volt. Steigert man die Verstärkungsempfindlichkeit auf das etwa Zehnfache, so erhält man Zählbereiche von über 100 Volt. Betrachtet man die Amplitudenkurve (Abb. 1), so stellt man fest, daß sich bei der vergrößerten Verstärkerempfindlichkeit der Zählbereich bereits in den beschränkten Proportionalbereich hinein erstreckt.

Zusatz von Argon senkt zwar die Betriebsspannung, der Zählbereich wird dann aber recht schmal. Der Zählbereich ist nach oben hin begrenzt durch eine rasche Zunahme an Nachentladungen, die schon bei verhältnismäßig geringen Überspannungen einsetzen.

Nach den hier gemachten Beobachtungen ist der Zählbereich nach hohen Stoßzahlen enger geworden. Das hängt vermutlich damit zusammen, daß nun, wie die allmählich entstandene Lichtempfindlichkeit zeigt, die zur Auslösung von Elektronen aus der Kathode benötigte Energie vermindert worden ist. Damit steigt die Wahrscheinlichkeit von Nachentladungen durch Photonen aus der Entladung oder durch positive Ionen stark an.

Lichtempfindlichkeit

Korff und Krumbein haben bereits darauf hingewiesen, daß die Zähler mit NH_3 -Füllung nach einer gewissen Stoßzahl beginnen, lichtempfindlich zu werden. Nach den hier durchgeführten Versuchen hängt die Lichtempfindlichkeit kaum vom Kathodenmaterial ab. Sie tritt auf nach 10^6 oder schon nach ca. 10^5 Stößen, je nachdem, ob der Zähler etwas unterhalb oder beträchtlich über der Einsatzspannung für den Auslösebereich betrieben worden ist. Die Lichtempfindlichkeit blieb im allgemeinen, nachdem sie einmal stark vorhanden war, über Monate des Ruhezustandes des Zählers hinweg erhalten. Ersetzte man nach Auftreten des lichtempfindlichen Zustandes die NH_3 -Füllung z. B. durch eine Argon + Alkohol-Füllung, so änderte sich nichts an der Lichtempfindlichkeit. Die absolute Empfindlichkeit war von Fall zu Fall verschieden, sie nahm zu mit der Dauer der vorhergegangenen Belastung des Zählers und der Höhe der angelegten Spannung. Der Wellenlängenbereich der Lichtempfindlichkeit wurde an einem Ms-Zähler mit einem Zeißschen Spiegelmonochromator bestimmt. Es handelt sich offenbar um eine bis ins langwellige UV reichende Empfindlichkeit. Bei der Hg-Linie 3650 Å war in einem charakteristischen Fall ein Ansprechen des Zählers noch deutlich erkennbar, bei der Hg-Linie 3341 Å war die Ansprechwahrscheinlichkeit auf das 10- bis 20fache (auf gleiche Lichtintensität bezogen) angewachsen.

Mit der starken Lichtempfindlichkeit trat auch eine leichte Erhöhung des Nulleffekts auf, der im Laufe von Tagen oder Wochen des Ruhezustandes des Zählers erhalten blieb oder zurückging, je nach der jeweiligen Beständigkeit der Lichtempfindlichkeit.

Lebensdauer der NH_3 -Zählrohre; massenspektrometrische Untersuchung des Füllgases

Änderungen in den Betriebsdaten und auch die Lebensdauer der Zählrohre hängen mit den allmählichen Änderungen in der Gaszusammensetzung zusammen. Diese lassen sich in eindrucksvoller Weise mit dem Massenspektrometer feststellen. Solche Versuche sind z. B. an Methanzählern von Farmer und Brown⁴⁾ vorgenommen worden. In ähnlicher Weise wurde hier das Füllgas der NH_3 -Zähler nach einer hohen Stoßzahl (1 bis $5 \cdot 10^6$ Stöße) mit einem 60°-Massenspektrometer untersucht. Zum Vergleich wurde unter möglichst denselben Betriebsbedingungen das Massenspektrum des normalen NH_3 aufgenommen. Die für eine Elektronenenergie von 100 eV gefundenen wichtigsten Linien des Massenspektrums sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1
Relative Intensität der Linien im Massenspektrum von NH_3 als Füllgas im Zählrohr, vor und nach einer Zählrohrbelastung von ca. $5 \cdot 10^6$ Stößen

NH_3 normal			NH_3 nach etwa $5 \cdot 10^6$ Stößen im Zählrohr		
Masse	Ion	Intensität rel. zu NH_3^+	Masse	Ion	Intensität rel. zu NH_3^+
17	NH_3^+	100	28	N_2^+	18
16	NH_2^+	78	17	NH^+	100
15	NH^+	6,1	16	NH_2^+	78
14	N^+	2,6	15	NH^+	7,1
1	H^+	1,0	14	N^+	4,7
			2	H_2^+	3,0
			1	H^+	1,8

Die für das normale NH_3 gefundene Intensitätsverteilung der Massen stimmt innerhalb der Meßgenauigkeit mit den von Mann, Hustrulid und Tate⁵⁾ gefundenen Werten überein. Wie Tab. 1 zeigt, hat sich das Füllgas nach mehr als 10^6 Stößen deutlich geändert; es tritt nun N_2 und H_2 in beträchtlicher Menge auf. Daß dabei die Linie H_2 verhältnismäßig schwach auftritt, hängt zum Teil damit zusammen, daß die Ionisierungsfunktion für H_2 im Bereich der Elektronenenergien von 100 eV um ein Mehrfaches kleiner ist als bei N_2 ⁶⁾. Die eingetragenen Werte stellen Mittelwerte aus mehreren Messungen dar. Bei den Werten für N_2 und H_2 ist ein schwacher Anteil, der von der thermischen Dissoziation des NH_3 am Glühdraht der Ionenquelle herrührt, bereits abgezogen worden. Das vollständige Fehlen der Linien 32 und 27 oder 26 usw. schließt die Möglichkeit von Undichtigkeiten oder Verunreinigungen einwandfrei aus. Das beobachtete N_2 und H_2 ist offensichtlich im Füllgas als Folge der Zählrohrentladungen entstanden.

⁴⁾ E. C. Farmer u. S. C. Brown, *Physic. Rev.* **74**, 902 (1948).

⁵⁾ M. W. Mann, A. Hustrulid u. J. T. Tate, *Physic. Rev.* **58**, 340 (1940).

⁶⁾ P. T. Smith, *Physic. Rev.* **38**, 1293 (1931).

Aus den massenspektrometrischen Untersuchungen kann man aber noch weitere Auskünfte über die Vorgänge im Zählrohr erhalten. In einem Zählrohr mit Dampffüllung — man kann nach dem Aussehen der Amplitudenkurven das NH_3 zu den Dämpfen rechnen — entstehen die Ionen in der Entladungslawine vorwiegend durch Ionisierungs- und durch Dissoziationsvorgänge infolge Elektronenstoß. Bei den schwereren Kohlenwasserstoffen sind die Dissoziationsvorgänge meist sogar weit häufiger als die einfachen Ionisierungen. Für die Beurteilung des Ablaufs einer Entladung im Zählrohr ist die Kenntnis des Anteils an ionisierten und neutralen Dissoziationsbruchstücken wichtig. Die Dissoziationshäufigkeit bei Elektronenstoß kann nun für die Elektronenenergien, wie sie in den Zählrohrentladungen auftreten (bis zu ca. 50 eV) bequem mit dem Massenspektrometer untersucht werden. Abb. 2 zeigt die Resultate der Messungen der Häufigkeit der Dissoziationsprodukte (relativ zur Häufigkeit des Ausgangsions) bei NH_3 als Funktion der Elektronenenergie. Wie man sieht, spielt bei Elektronenenergien bis zu 50 eV eigentlich nur noch der Prozeß

$\text{NH}_3 + e^- \rightarrow \text{NH}_2^+ + \text{H} + 2e^-$
eine Rolle.

Die für diesen Prozeß erforderliche Mindestenergie der Elektronen ist von Mann⁶⁾ zu $15,7 \pm 0,1$ eV bestimmt worden; die Ionisierungsenergie von NH_2^+ beträgt etwa 11,9 eV.

Bei den Vorgängen in den Entladungslawinen treten demnach häufig neutrale H-Atome auf. Ihre Intensität wird aber noch durch einen weiteren Prozeß vermehrt. Bekanntlich entstehen in den Lawinen auch UV-Quanten, die dann im mehratomigen Gas — hier dem NH_3 — rasch absorbiert werden. Nach allen Vorstellungen über den Ausbreitungsmechanismus im Zählrohr befinden sich darunter auch Photonen mit Energien größer als z. B. 4,85 eV (entsprechend etwa 2500 Å). Solche Photonen haben genügend Energie, um eine Dissoziation von NH_3 in $\text{NH}_2 + \text{H}$ hervorzurufen (Dissoziationsenergie 112 Kal/Mol). Farkas und Harteck⁷⁾ haben nun gezeigt, daß die hierbei entstehenden H-Atome Anlaß geben zu einer Reihe von Reaktionen, bei denen über ein zeitweise vorhandenes Molekül NH_4 und unter Mitwirkung des ebenfalls vorhandenen NH_2 -Radikals zum Teil wieder NH_3 , zu einem gewissen Teile aber auch N_2 und H_2 gebildet werden. Der mit dem Massenspektrometer gefundene Anteil an N_2 und H_2 im Zählrohrfüllgas ist sehr wahrscheinlich auf diese Weise entstanden.

Die massenspektrometrische Untersuchung hat hiermit gezeigt, daß im Zählrohr auch Änderungen in der Gaszusammensetzung erfolgen können als Folge von

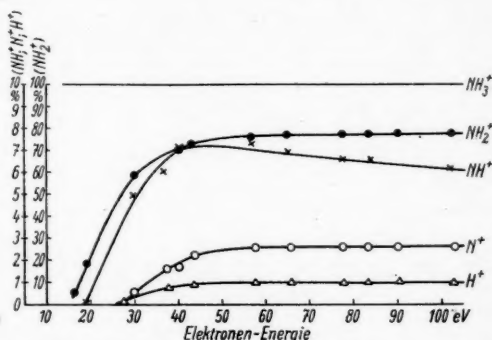


Abb. 2. Relative Häufigkeiten der Dissoziationsprodukte von NH_3 in Abhängigkeit von der Energie der stoßenden Elektronen

⁷⁾ L. Farkas u. P. Harteck, Z. physik. Chem. (B) **25**, 257, 1934.

chemischen Reaktionen, die durch Radikale ausgelöst werden, die während der Zählrohrentladung entstehen. Und zwar können die Produkte dieser chemischen Reaktionen in dem hier untersuchten Falle, wenigstens was das N_2 anbetrifft, nur auf chemischem Wege und nicht auch, wie in den meisten anderen Fällen, auf direktem Wege durch Elektronenstoß gebildet worden sein.

Man muß also auch beim NH_3 -Zähler mit einem allmählichen Verbrauch des Füllgases rechnen. Dabei sind die Reaktionen, die zur Bildung der photoempfindlichen Schicht führen, noch gar nicht berücksichtigt. Für diese kann bis jetzt noch keine eindeutige Erklärung gegeben werden. Die Beobachtungen von Korff und Krumbein sind aber nun doch wohl verständlich, da ja ein Teil der durch die H-Atome eingeleiteten Prozesse wieder auf NH_3 zurückführen, so daß im ganzen der Verbrauch an NH_3 langsamer als üblich erfolgt.

(17b) Weil/Rh., Marktplatz 5, Pfädlistr. 12.

(Bei der Redaktion eingegangen am 17. Juli 1950.)

Die Eigenfrequenzen zylindrischer Stahlstäbe

Von R. Adolph, H. O. Kneser und I. Schulz

(Mit 7 Abbildungen)

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Anstalt zu Braunschweig)

Inhaltsübersicht

Torsions-, Dehnungs- und Biegeffrequenzen zylindrischer Stahlstäbe werden auf einige 10^{-4} genau gemessen bis zu Frequenzen, bei denen die Wellenlänge fast gleich dem Stabdurchmesser ist. Während die Torsionsfrequenzen durchweg streng harmonisch sind, zeigen die Dehnungsschwingungen infolge der Querkontraktion Abweichungen, die genau mit den entsprechenden Rechnungen von Bancroft übereinstimmen. Die Biegeffrequenzen werden mit Rechnungen von Goens verglichen.

Die Gesamtheit der Eigenschwingungen isotroper, kreiszylindrischer Stäbe ist, sofern man von den Radialschwingungen absieht, wesentlich bestimmt durch das Verhältnis $d:\lambda$, wenn d den Stabdurchmesser und λ den doppelten Abstand zweier benachbarter Knoten bezeichnet. Für Dehnungs- und Torsionsschwingungen ist $\lambda = 2l/p$ (l = Stablänge; p = Ordnungszahl). Für Biegeschwingungen soll λ als $2l/(p + \frac{1}{2})$ definiert werden. Diesem Wert nähert sich der doppelte Abstand der mittleren Knoten (λ') mit wachsendem p sehr schnell¹⁾.

Zweckmäßig stellt man nicht die Eigenfrequenzen f , sondern $V = f \cdot \lambda$ als Funktion von d/λ dar. V ist identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des betreffenden Schwingungstyps und wird — abgesehen von der Biegeschwindigkeit — für $d/\lambda \ll 1$ und ebenso $d/\lambda \gg 1$ nur abhängig von Materialkonstanten,

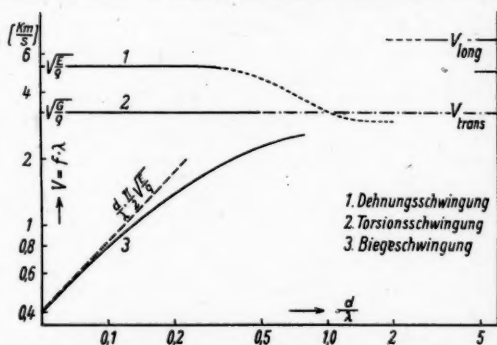


Abb. 1. Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeiten vom Verhältnis des Stabdurchmessers zur Wellenlänge; berechnet für Stahl mit $\sigma = 0,3$

¹⁾ Für $p = 1$: $\lambda = 1,333 l$; $\lambda' = 1,132 l$
 $p = 1$: $\lambda = 0,800 l$; $\lambda' = 0,7358 l$
 $p = 1$: $\lambda = 0,571 l$; $\lambda' = 0,5768 l$

nicht von den Stababmessungen. Eine Übersicht bietet das in Abb. 1 gegebene Schema; darin bedeutet E den Dehnungs-, G den Torsionsmodul und σ die Querkontraktionszahl.

Der rechte Teil der Abb. 1 soll die Verhältnisse im unbegrenzten Medium andeuten. Die dort allein möglichen zwei Schwingungstypen haben sich mit Hilfe von Impulsen sehr hoher Frequenz getrennt nachweisen lassen²⁾. Im mittleren Bereich ($d/\lambda \lesssim 1$) treten sehr komplizierte Schwingungstypen auf, darunter solche, bei denen nahe der Stabachse die longitudinale, nahe dem Stabmantel die transversale (radiale) Bewegung vorherrscht. (Diese sind in Abb. 1 weggelassen.) Aus ihnen entwickelt sich mit wachsendem d/λ die reine Longitudinalwelle. Diese Verhältnisse sind neuerdings besonders durch theoretische und experimentelle Untersuchungen von Hüter³⁾ weitgehend geklärt.

Die vorliegende Mitteilung befaßt sich nur mit den 3 Schwingungstypen des linken Bereichs, die etwa bis $d/\lambda = 0,8$ verfolgt werden ($f = 25$ bis 40000 Hz). Sie stellt somit eine Fortsetzung und Erweiterung einer Untersuchung von Goens dar^{3a)}, der Torsions- und Biegeschwingungen bis $d/\lambda = 0,11$ untersuchte ($f = 500$ bis 12000 Hz). Dieser Bereich interessiert nicht nur im Hinblick auf die Präzisionsbestimmung von E und G , sondern auch weil hier der Übergang der Dehnungs- und Biegungs- in die Transversalwelle in statu nascendi studiert werden kann. Meßtechnisch hat der Bereich $d/\lambda \lesssim 1$ vor den beiden anderen, die nur für Ultraschallmethoden zugänglich sind, verschiedene Vorteile:

1. „Störungen“ durch Radialschwingungen treten hier noch nicht auf.
2. Jeder Wellentyp läßt sich getrennt anregen.
3. Die Frequenzen können am frei ausschlagenden Stab gemessen werden, so daß eine gleichmäßige Verteilung der Amplitude gewährleistet ist.

Versuchsmaterial- und -anordnung

Da hier die Größe der Materialkonstanten nicht interessiert, haben wir uns auf Stahlstäbe — wegen ihrer geringen Dämpfung — beschränkt. Wir verwendeten teils gezogene, teils geschliffene Stäbe. Ihre Durchmesser und deren Konstanz wurden mit der Mikrometerschraube, ihre Länge mit der Schublehre bestimmt, was für die angestrebte Genauigkeit von 10^{-3} — 10^{-4} im allgemeinen ausreichte. Besondere Maßnahmen zur Konstanthaltung der Temperatur erwiesen sich als nicht erforderlich.

Die dünneren Stäbe wurden auf Bruchteile eines Millimeters genau an zwei Knotenstellen in Cu-Drahtschlingen aufgehängt, deren eine an der Nadel eines Kristalltonabnehmers für Schallplatten befestigt war. Diese Schlinge war bei den tieferen Frequenzen etwa 20 cm, bei den höheren etwa 3 cm lang. Die dickeren (schwereren) Stäbe belasten das Abnahmesystem zu stark, so daß dann der Stab in zwei bzw. (bei ungerader Knotenzahl) einem Knoten an Stahldrähten fest aufgehängt und die Nadel nahe bei der Aufhängestelle mit der Mantelfläche in Berührung gebracht wurde; selbstverständlich so, daß die Bewegung der Nadel in Richtung größter Empfindlichkeit des Tonabnehmers stattfand. Bei schnell abklingenden Schwingungen mußte gelegentlich die Nadel bzw. die an ihr befestigte Schlinge um etwa 1 mm aus der Knotenlage entfernt werden, um eine

²⁾ D. L. Arenberg, J. A. S. A. **20**, 1 (1948).

³⁾ Th. Hüter, Z. angew. Physik **1**, 275 (1949).

^{3a)} E. Goens, Ann. Physik **11**, 649 (1931).

deutliche Anzeige zu erhalten. Die Resonanzfrequenzen blieben dabei innerhalb unserer Meßgenauigkeit unverändert.

Erregt werden die Schwingungen durch kurzes Berühren des Stabes mit der Nadel eines zweiten Kristall-Tonabnehmers meist an der Stirnfläche. Dieser wurde vom Generator genau mit derjenigen Frequenz beschickt, mit der der Stab nachher frei ausschwingt. Das Anschwingen der Torsionsschwingung wird gefördert durch eine Spur Klebwachs an der Spitze der Nadel.

Die Biegefrequenzen sind immer in Dubletts aufgespalten, die den Schwingungen in den Richtungen der beiden Hauptträgheitsachsen des Querschnitts entsprechen. Da für möglichst genaue Einhaltung der Kreisform gesorgt war, lagen die beiden Komponenten meist nur um wenige Hz auseinander, was die Einstellung einer Frequenz erschwert. Deswegen wurden die Stäbe durch Anbringung eines Feilstriches entlang einer Mantellinie absichtlich unrund gemacht und immer nur die höhere der beiden Frequenzen gemessen.

Den elektrischen Teil der Apparatur gibt das Prinzip-Schaltbild der Abb. 2 wieder. Vom RC-Generator führt eine Leitung zum anregenden Kristallsystem, eine zweite zur Horizontalablenkung des Oszillographen. Das abnehmende System ist über einen Resonanzverstärker und einen Regelverstärker mit der Vertikalablenkung verbunden. Wenn der Oszillograph nach Abheben des anregenden Systems beim Ausschwingen des Stabes eine stehende Figur zeigt, ist die Frequenz richtig eingestellt und wird gemessen.

Die Generatorfrequenz kann im ganzen Bereich von 20 bis 40000 Hz auf $1 \cdot 10^{-4}$ genau eingestellt und gemessen werden. Hierüber wird an anderer Stelle berichtet.

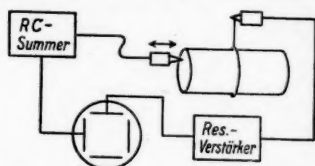


Abb. 2. Apparat (schematisch)

Torsions- und Dehnungsschwingungen

Die Meßergebnisse sind in Abb. 3 nach Art der Abb. 1 aufgetragen mit $f \cdot \lambda$ bzw. $f \cdot \lambda = \frac{V}{V_0}$ als Ordinate. Die Materialkonstanten $V_0 = \sqrt{G/\rho}$ bzw. $\sqrt{E/\rho}$ wurden dabei so gewählt, daß die Kurven für $d/\lambda \rightarrow 0$ gegen 1 streben.

Die Torsionsfrequenz bzw. das entsprechende $V:V_0$ erweist sich, wie zu erwarten, als unabhängig von d/λ ; d. h. das Harmoniesgesetz ist streng erfüllt. Jedoch ist die Streuung mit etwa $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ größer, als

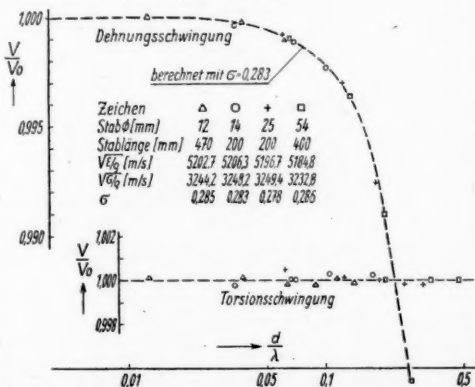


Abb. 3. Abhängigkeit der (relativen) Geschwindigkeit der Dehnungs- und Torsionswellen vom Verhältnis des Stabdurchmessers zur Wellenlänge

daß man sie auf Meßfehler zurückführen könnte. Die Ursache dürfte in geringfügigen Abweichungen von der Konstanz des Querschnittes zu suchen sein.

Die Dehnungsschwingungen dicker Stäbe sind infolge der Querkontraktion nicht streng harmonisch. Das alte Problem ist neuerdings von Bancroft⁴⁾ soweit durchgerechnet worden, daß er Zahlenwerte für $V:V_0$ bei verschiedenen d/λ und Querkontraktionszahlen σ angeben kann. Da letztere sich bei unseren Stäben nur unwesentlich unterscheiden ($\sigma = 0,283 \pm 0,005$), lassen sich alle Ergebnisse als Funktion nur von d/λ darstellen und mit den entsprechenden Zahlen der Bancroftschen Tabelle vergleichen. Die Übereinstimmung ist, wie Abb. 3 zeigt, innerhalb der Meßfehler vollkommen⁵⁾. Für den dicksten Stab (54 mm \varnothing) sind die Ergebnisse in Tab. 1 zahlenmäßig dargestellt:

Tabelle 1

Knotenzahl	1	2	3	4	5
d/λ	0,067	0,135	0,202	0,269	0,337
V/V_0 gem. . . .	0,9992	0,9966	0,9912	0,9836	0,9723
V/V_0 ber. . . .	0,9990	0,9962	0,9912	0,9835	0,9720

Biegeschwingungen

Die Theorie ist in drei Etappen entwickelt worden⁶⁾:

I. Unter Berücksichtigung der nur senkrecht zur Stabachse erfolgenden Bewegung mit dem Ergebnis:

$$f = \frac{m^2}{8\pi} \cdot \frac{d}{l^3} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

wobei m die Wurzel der Gleichung $\cos m \cdot \coth m = 1$ bedeutet.

II. Unter Berücksichtigung der Rotationsträgheit der Stabelemente mit dem Ergebnis (Rayleigh)

$$f = \frac{m^2}{8\pi} \cdot \frac{d}{l^3} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} R^{-1}, \quad (2)$$

worin $R(d, l, m)$ wieder als Lösung einer transzendenten Gleichung gegeben ist.

III. Unter Berücksichtigung der Scherung der Stabelemente (Timoschenko, Goens a. a. O.)

$$f = \frac{m^2}{8\pi} \cdot \frac{d}{l^3} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} T^{-1}, \quad (3)$$

wobei für $T(E, G, l, d, m)$ das gleiche gilt wie für R). Für $p > 2$ und $d^2/l^2 \ll 8^6)$ gibt Goens (a. a. O. Gleichung 29) eine übersichtliche Näherungsformel an:

$$T = 1 + \frac{2}{m} Q^2 (3 - z) + Q^2 (1 + z) - \frac{Q^4 z}{1 + (1 + z) Q^2}, \quad (4)$$

in welcher $z = 1,11 \cdot E/G$ und $Q = \frac{\pi}{2} (2p + 1) \frac{d}{l}$ ist.

⁴⁾ D. Bancroft, Physic. Rev. 59, 588 (1941).

⁵⁾ Bei Stäben mit extrem großen und kleinen Querkontraktionszahlen (Duraluminium, $\sigma = 0,43$ bzw. Messing, $\sigma = 0,21$) fanden wir erhebliche Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Dehnungsfrequenzen.

⁶⁾ Wir bedienen uns der in der Goensschen Abhandlung verwandten Bezeichnungen, nur daß die Frequenz hier mit f bezeichnet wird.

⁷⁾ Vgl. E. Goens, a. a. O., Gleichung 17, 18 und 20.

⁸⁾ Dies ist gleichbedeutend mit: A und $B < 1$ in der Goensschen Bezeichnungsweise.

Nach der primitiven Theorie sollte $f \cdot \lambda$ proportional d/λ sein. Tatsächlich betragen die Abweichungen bereits bei $d/\lambda \approx 0,25$ mehr als 20%, wie Abb. 4 zeigt. Die Streuung der Meßpunkte ist durch die verschiedenen Elastizitätsmoduln der Stäbe bedingt.

Um die Genauigkeit der Frequenzmessung graphisch voll auszunützen, ist in Abb. 5 eine dem Quotienten V/V_0 entsprechende Größe: $f \cdot \frac{8\pi}{m^2} \cdot \frac{l^2}{d} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \sqrt{T}$ als Funktion von Q dargestellt⁹⁾ unter Verwendung des Goensschen Näherungs-

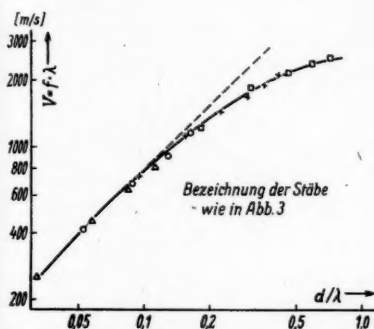


Abb. 4. Abhängigkeit der Biegewellengeschwindigkeit vom Verhältnis des Stabdurchmessers zur Wellenlänge

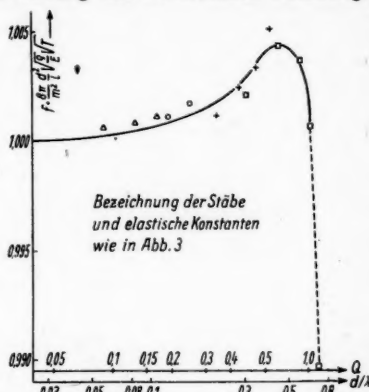


Abb. 5. Vergleich der Biegefrequenzen mit der Goensschen Näherungsformel

wertes für T [vgl. (4)]. Dieser Ausdruck sollte wegen (3) konstant = 1 sein; er entspricht dem früher verwandten V/V_0 . Da für $p > 2$ die anfangs definierte „Wellenlänge“ um weniger als 1% von $2l/(p + \frac{1}{2})$ abweicht, ist auch $d/\lambda (\approx \frac{2}{\pi} Q)$ als Abszissenmaßstab eingetragen, womit Abb. 5 den Abb. 1 und 3 angeglichen ist. Für die elastischen Konstanten E und G wurden dieselben Werte eingesetzt, die sich aus den Dehnungs- und Torsionsfrequenzen ergaben (vgl. Abb. 3). Die Abweichungen vom Wert 1 bleiben bis $d/\lambda = 0,1$ innerhalb 1%, bis $d/\lambda = 0,7$ innerhalb 5%. In diesen Grenzen ist also die Goenssche Näherung gültig und mit ihrer Hilfe die Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den Biegefrequenzen möglich.

Koinzidenz verschiedener Eigenfrequenzen

Da die Biegefrequenzen etwa mit l^{-2} , die Torsions- und Dehnungsfrequenzen aber mit l^{-1} variieren, kann bei jedem Stab durch geeignete Wahl der Länge irgendeine Biegefrequenz mit irgendeiner Torsions- oder Dehnungsfrequenz in Übereinstimmung gebracht werden. Koinzidenz der p -ten Torsions- mit der q -ten Dehnungsfrequenz dagegen läßt sich nur dann erreichen, wenn diese ohnehin so dicht beieinander liegen, daß die geringfügige Abhängigkeit der letzteren von

⁹⁾ In der Beschriftung der Ordinate ist versehentlich l und d vertauscht.

d/λ (vgl. Abb. 3) ausreicht, um durch Formänderung des Stabes völlige Übereinstimmung zu erzielen, d. h. es muß sein:

$$p \cdot \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx q \cdot \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

oder

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{E}{G} - 1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p} \right)^2 - 1.$$

Diese Bedingung läßt sich bei Stahl ($\sigma \approx 0,29$) nur für sehr hohe p und q erfüllen. Dagegen gelang es, bei einem Duraluminiumstab mit $\sigma = 0,43$ die dritte Dehnungs-

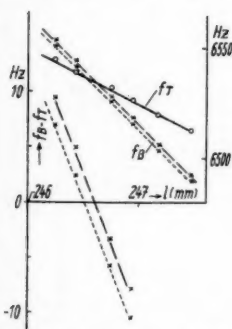


Abb. 6. Koinzidenz von Biege- und Torsionsfrequenz

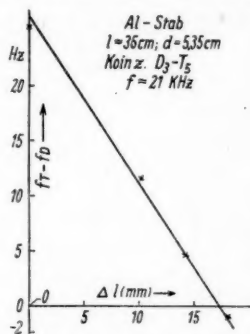


Abb. 7. Koinzidenz von Dehnungs- und Torsionsfrequenz

mit der fünften Torsionsschwingung durch Kürzen des Stabes zur Deckung zu bringen.

Obwohl eine Beeinflussung der hier behandelten Schwingungstypen aus Symmetriegründen nicht zu erwarten ist, erschien es uns doch der Mühe wert, diese Koinzidenzen durchzumessen. Das Ergebnis zeigt Abb. 6 für eine Biege- und Torsionsschwingung; erstere ist wegen der Unrundheit des Stabes aufgespalten.

Der Betrag der sehr kleinen Längenänderungen wurde durch Wägung bestimmt. Keinerlei Anomalie der beiden Frequenzen tritt auf; ihre Differenz geht glatt durch den Wert 0 hindurch¹⁰⁾. Das gleiche Bild bietet die Koinzidenz Biegung-Dehnung. Für die Koinzidenz Dehnung-Torsion, die aus den genannten Gründen an Al untersucht wurde, ist nur die Frequenzdifferenz $f_T - f_D$ als Funktion der Länge wiedergegeben (Abb. 7), die wiederum glatt durch den Wert 0 hindurchgeht. Hier konnten die beiden Schwingungstypen auch dann noch getrennt angeregt werden, wenn ihre Frequenzen nur um 2 Hz — das ist in diesem Fall weniger als 10^{-4} — voneinander abwichen.

¹⁰⁾ Bei Resonanzabstimmung zweier gekoppelter Systeme wird die Differenz zwischen den beiden Resonanzfrequenzen bekanntlich niemals = 0.

Braunschweig, Physikalisch-Technische Anstalt.

(Bei der Redaktion eingegangen am 24. Juli 1950.)

Bemerkungen zur Theorie der Elektrostriktion in Onsager-Flüssigkeiten

Von H. Falkenhagen und H. Jacob

Inhaltsübersicht

Die Onsager-Theorie ermöglicht die Berechnung der statischen elektrostriktiven Materialkonstanten; diese werden für eine Reihe von Flüssigkeiten berechnet.

Der eine¹⁾ von uns hat bereits vor mehreren Jahren auf die Bedeutung der Theorie des inneren Feldes von Onsager²⁾ hingewiesen, welche die bekannte $\frac{4\pi}{3}$ -Katastrophe dielektrischer Flüssigkeiten vermeidet. Sie erklärt demzufolge das nichtferroelektrische Verhalten dieser Flüssigkeiten. Nach Onsager setzt sich das innere Feld aus einem als Folge der äußeren Feldstärke entstehenden direkten Anteil und einem Reaktionsfeld zusammen; letzteres beruht auf der Induktion des Dielektrikums durch den Dipol und weist in dieselbe Richtung wie der Dipol. Das Reaktionsfeld liefert zum Drehmoment zufolge der Orientierung des Dipols gegenüber dem Feld keinen Beitrag. Onsager vermochte nun das zeitlich gemittelte elektrische Moment der Volumeneinheit zu berechnen, worauf wir gleich noch zu sprechen kommen.

In neuerer Zeit ist nun auf die Onsager-Theorie, die streng genommen noch durch eine Diskontinuums-Theorie erweitert werden müßte, des öfteren eingegangen³⁾.

Es schien uns angezeigt, diese Theorie im Zusammenhang mit einem kürzlich von H. Falkenhagen und R. Mees⁴⁾ entdeckten Effekt der Ultraschallerzeugung mittels Elektrostriktion heranzuziehen, um die Größenordnung der elektrostriktiven Konstanten abzuschätzen.

Die thermodynamische Theorie der Elektrostriktion führt, wie man mit Hilfe des Gibbsschen Potentials leicht erkennt⁵⁾, auf die allgemein gültige Gleichung

$$\frac{\Delta v}{v} = a E^2 = - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T, \quad (1)$$

¹⁾ H. Falkenhagen, Z. techn. Physik **19**, 492 (1938).

²⁾ L. Onsager, J. Amer. chem. Soc. **58**, 1486 (1936).

³⁾ C. J. F. Böttcher, Physica **6**, 59 (1939); R. Mecke u. H. Renter, Naturwiss. **36**, 252 (1949); E. Fischer, Z. Physik **127**, 49 (1949); Ann. Physik (6) **6**, 117 (1949); Z. Naturforsch. **4a**, Heft 9, 707 (1949); Z. Elektrochem. **53**, 16 (1949).

⁴⁾ H. Falkenhagen u. R. Mees, Reichsber. Physik **1944**, H. 1, S. 46; Z. angew. Physik **1**, 304 (1949).

⁵⁾ P. Debye, Handbuch der Radiologie von Marx, Bd. VI.

wo

E die Feldstärke,
 v das spezifische Volumen,
 p den Druck und
 ε die Dielektrizitätskonstante

bedeuten.

Mit Hilfe der Definition der Kompressibilität

$$\alpha = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

und des Zusammenhanges zwischen der Dichte ϱ und dem spezifischen Volumen v

$$\varrho = \frac{1}{v}$$

ergibt sich daher für die Elektrostriktion in Flüssigkeiten

$$\Delta p = \varrho \frac{E^2}{8} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} \right)_T. \quad (2)$$

Wie R. Becker⁶⁾ gezeigt hat, läßt sich dieser Ausdruck für unpolare Flüssigkeiten mit Hilfe der Clausius-Mosottischen Beziehung

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi L \varrho}{3M} \alpha$$

wie folgt schreiben

$$\Delta p = \frac{E^2}{8\pi} \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{3} \quad (2')$$

oder

$$\Delta p = b E^2 \quad \text{wo} \quad b = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{24\pi}$$

als statischer Druckkoeffizient der Elektrostriktion bezeichnet werden kann; b ist dimensionslos. Gibt man E in el. stat. Feldst. Einh. an, so ergibt sich Δp unmittelbar in dyn/cm². Für polare Flüssigkeiten versagt die Clausius-Mosottische Beziehung. Nach Onsager⁷⁾ resultiert:

$$\frac{4\pi L \varrho}{9kTM} \mu_0^2 = \frac{(\varepsilon - n^2)(2\varepsilon + n^2)}{\varepsilon(n^2 + 2)^2}. \quad (3)$$

In der Beziehung (3) und in der Clausius-Mosottischen Beziehung bedeuten:

L die Loschmidtsche Zahl pro Mol gerechnet,
 M das Molgewicht,
 k die Boltzmannsche Konstante,
 T die absolute Temperatur,
 μ_0 das Dipolmoment und
 n^2 die innere Dielektrizitätskonstante,
 α die Polarisierbarkeit der Molekel.

Die Onsager-Beziehung (3) läßt sich für feste Temperatur leicht umschreiben in

$$f(\varepsilon, n^2, \varrho) \equiv \frac{2\varepsilon^2 - n^2\varepsilon - n^4}{\varrho \varepsilon (n^2 + 2)^2} = \text{konst.}, \quad (4)$$

⁶⁾ R. Becker, Theorie der Elektrizität, Bd. I, Teubner 1944, § 40.⁷⁾ l. c.

woraus sich durch implizite Differentiation ergibt

$$\frac{d\varepsilon}{dQ} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial n^2} \frac{dn^2}{dQ} + \frac{\partial f}{\partial Q}}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}};$$

durch partielle Differentiation von (4) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial n^2} = - \frac{4\varepsilon^2 - n^2\varepsilon + 2\varepsilon + 4n^2}{Q\varepsilon(n^2 + 2)^3} \quad (4a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = - \frac{2\varepsilon^2 - n^2\varepsilon - n^4}{Q^2\varepsilon(n + 2)^2} \quad (4b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{2\varepsilon^2 + n^4}{Q\varepsilon^2(n^2 + 2)^2}. \quad (4c)$$

Der Differentialquotient $\frac{dn^2}{dQ}$ errechnet sich aus der Molekularrefraktion für unendlich große Wellenlängen

$$R_\infty = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{M}{Q} \quad (5)$$

zu

$$\frac{dn^2}{dQ} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{3Q} \quad (5a)$$

Die innere Dielektrizitätskonstante n^2 läßt sich ebenfalls aus (5) berechnen. R_∞ ergibt sich aus bekannten Werten R_1 und R_2 unter Benutzung der Dispersionsgleichung³⁾

$$n_\lambda^2 = 1 + \sum_i \frac{C_i \lambda_i^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

und Interpolation auf die Wellenlänge ∞ zu

$$R_\infty = \frac{\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{R_1} - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{R_2}}{\frac{\lambda_1^2}{R_1} - \frac{\lambda_1^2}{R_2}}.$$

Unter Benutzung der Gln. (4a) bis (4c) und (5a) ergibt sich schließlich

$$\frac{d\varepsilon}{dQ} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1) \{2\varepsilon + 4n^2(\varepsilon + 1) - n^4\}}{3Q(2\varepsilon^2 + n^4)},$$

somit folgt für polare Flüssigkeiten

$$b = \frac{1}{24\pi} \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1) \{2\varepsilon + 4n^2(\varepsilon + 1) - n^4\}}{(2\varepsilon^2 + n^4)}. \quad (7)$$

Selbstverständlich gilt diese Formel nicht für beliebig hohe Feldstärken, sondern nur für solche, bei denen die Orientierungspolarisation noch keine Sättigungerscheinungen zeigt. Ebenso fallen solche Stoffe aus, bei denen der Dipol nicht hinreichend zentral im Molekül angeordnet ist, da in der Onsagerschen Theorie der Dipol als im Zentrum eines kugelförmigen Moleküles befindlich vorausgesetzt worden ist.

Mit Hilfe der Gl. (7) wurden für einige Stoffe die statischen Druckkoeffizienten der Elektrostriktion errechnet und die Druckdifferenzen Δp bei einer Feldstärke von 8 el. stat. F. E. in dyn/cm² angegeben.

Im Hinblick auf die unter ⁴⁾ zitierte Arbeit wurden die nichtpolaren Substanzen Tetrachlorkohlenstoff und Benzol in der nachfolgenden Tabelle mit aufgenommen; für sie wurde b nur nach Clausius-Mosotti berechnet. Die Werte von n^2 für Toluol, m- und o-Xylol wurden unter Benutzung bekannter Werte aus dem Ta-

³⁾ H. Falkenhagen, Hdb. der phys. Optik, Bd. 1, S. 780 (1927).

bellenswerk von Landolt-Börnstein berechnet, die übrigen aus der Arbeit von Böttcher³⁾ übernommen.

Zum Vergleich werden unter b' die Koeffizienten angegeben, die sich bei Benutzung der Beziehung von Clausius-Mosotti ergeben würden. Interessant wäre b für p-Xylol, das sicherlich geringer sein wird als b für o- und m-Xylol.

Substanz ($\epsilon = t^\circ\text{C}$)	ϵ	n^2	b (Onsager)	b' (C.-M.)	Δp
Tetrachlorkohlenstoff (20)	2,20			0,0510	3,26
Benzol (20)	2,28			0,0558	3,57
Toluol (14,7)	2,37	2,18	0,0792	0,0612	5,07
m-Xylol (14,9)	2,39	2,18	0,0806	0,0625	5,16
o-Xylol (14,0)	2,57	2,20	0,0942	0,0742	6,02
Anisol (20)	4,44	2,04	0,226	0,246	14,4
Chloroform (20)	4,84	2,04	0,258	0,294	16,5
Chlorbenzol (20)	5,78	2,24	0,344	0,430	22,0
Anilin (20)	6,98	2,42	0,458	0,633	29,3
Äthyljodid (20)	7,82	2,21	0,494	0,796	31,6
Pyridin (25)	13,3	2,21	0,896	2,34	57,4
Aceton (20)	21,4	1,82	1,28	6,06	81,7
Benzonitril (18)	25,9	2, 5	1,83	8,89	117,00
Nitrobenzol (20)	36,1	2,31	2,64	17,3	169,00
Nitromethan (20)	39,4	1,87	2,44	20,5	156,00

In der folgenden Übersicht seien für die polaren Substanzen die Größen der Dipolmomente μ_0 (berechnet nach der Onsager-Formel) in Debye-Einheiten (10^{-18} c. g. s.) angegeben.

Toluol040	Äthyljodid166
m-Xylol045	Pyridin230
o-Xylol057	Aceton312
Anisol153	Benzonitril363
Chloroform126	Nitrobenzol426
Chlorbenzol151	Nitromethan361
Anilin154		

Zusammenfassend sei bemerkt, daß sich mit Hilfe der Onsagerschen Theorie die Berechnung der statischen elektrostriktiven Materialkonstanten ermöglichen läßt, da Zahlenangaben hierüber in den einschlägigen Tabellenwerken und in der Literatur fehlen.

Es soll nun versucht werden, die Druckkoeffizienten der Elektrostriktion durch Messung der Schallwechseldruckamplituden im Ultraschallgebiet experimentell zu ermitteln. Dann sind aber die in der Tabelle angegebenen Werte „ b “ in dieser Form nicht mehr brauchbar, da der Berechnung statische Felder zugrunde liegen. Der experimentellen Arbeit muß also notwendig eine theoretische Erörterung über eine Dispersionstheorie des Druckkoeffizienten der Elektrostriktion parallel laufen⁹⁾. Die Extrapolation dieses Koeffizienten, also b , könnte dann zur Diskussion der Onsagerschen Theorie des inneren Feldes führen.

⁹⁾ In Vorbereitung.

Zur Regularisierung der klassischen Elektrodynamik*)

Von H. Lehmann

Inhaltsübersicht

Es wird das Problem einer Beseitigung der Schwierigkeiten der klassischen Theorie des Elektrons im Rahmen einer linearen, lorentzinvarianten Theorie behandelt. Ausgehend vom Ersatz der Greenschen Funktionen der Maxwell'schen Wellengleichung durch reguläre Ausdrücke erhält man eine einheitliche Darstellung der Ergebnisse verschiedener Arbeiten auf diesem Gebiet. Insbesondere werden dann die Feldgleichungen, das Auftreten avancierter Wirkungen, der Energie-Impuls-Tensor, sowie die Strahlung beschleunigter Elektronen untersucht. Schließlich wird darauf hingewiesen, daß man zu denselben Ergebnissen gelangt, wenn man unter Beibehaltung der Maxwell'schen Gleichungen den Ausdruck für die Lorentzkraft abändert.

1. Einleitung

Die bekannten mit dem Problem der Selbstenergie zusammenhängenden Hindernisse, die einer lorentzinvarianten Theorie des Elektrons im Wege stehen, sind in den letzten Jahren mehrfach untersucht worden. Die vorliegende Arbeit fällt in den Rahmen, der durch die Veröffentlichungen von Bopp¹⁾, Feynman²⁾ und McManus³⁾ gegeben ist⁴⁾. Die Berechtigung für ein Vorgehen im klassischen Bereich möchte ich darin sehen, daß die Methoden, mit denen man die divergenten Ausdrücke der Quantenelektrodynamik behandeln kann, dieselben sind wie hier, jedoch nicht alle in der klassischen Theorie möglichen Ansätze sich ohne weiteres übertragen lassen. Eine genauere Untersuchung des klassisch Erreichbaren ist das Ziel der folgenden Ausführungen. Die gewählte Formulierung scheint geeignet, den Zusammenhang der verschiedenen klassischen Theorien untereinander und mit den Regularisierungsverfahren der quantisierten Theorie⁵⁾ hervortreten zu lassen.

2. Bezeichnungen

Die Lichtgeschwindigkeit ist gleich Eins gesetzt. Der Ortsvektor eines Weltpunktes wird mit $x_\mu = (r, x_0)$; $x_0 = t$ bezeichnet. Allgemein laufen griechische

*) Dissertation Jena.

¹⁾ F. Bopp, a) Ann. Physik **38**, 345 (1940); b) Ann. Physik **42**, 573 (1942); c) Z. Naturforsch. **1**, 53 (1946).

²⁾ R. P. Feynman, Physic. Rev. **74**, 939 (1948).

³⁾ H. McManus, Proc. Roy. Soc. London, A **195**, 323 (1948).

⁴⁾ Nach Fertigstellung dieser Arbeit wurde mir die Veröffentlichung von A. Pais u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **79**, 145 (1950), zugänglich, die den hier betrachteten Problemkreis für die klassische und die quantisierte Theorie behandelt.

⁵⁾ W. Pauli u. F. Villars, Rev. mod. Physics **21**, 434 (1949).

Indizes von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Über gleiche Indizes ist gemäß $x y = x_\mu y_\mu = x_i y_i - x_0 y_0$ zu summieren. Das Integrationselement lautet $dx = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = dx_0 d^3 x$; die δ -Funktion $\delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$. Integrale ohne Angabe von Grenzen laufen von $-\infty$ bis $+\infty$. Fourierintegrale werden in der Form

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(k) e^{ikx} dk; \quad k_\mu = (k, k_0) \quad k^2 = k_i^2 - k_0^2; \\ dk = dk_0 d^3 k;$$

benutzt. Ableitungen nach den Koordinaten sind mit $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ bezeichnet.

$\Theta^+(a) = 1$ für $a \geq 0$; $= 0$ für $a < 0$.

3. Das Feld einer Stromverteilung

In der Maxwell'schen Theorie wird das Feld mittels des Viererpotentials A_μ unter Benutzung von $\partial_\mu A_\mu(x) = 0$ beschrieben durch die Wellengleichung

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x) \quad (j_\mu = \text{Viererstrom}), \quad (1)$$

deren Lösungen sich mit Hilfe ihrer Greenschen Funktionen darstellen lassen. Diese seien mit $D^{(\cdot)}(x)$ bezeichnet. Sie sind Lösungen von $\square D^{(\cdot)}(x) = -\delta(x)$ und lauten bekanntlich*) in Fourierdarstellung

$$D^{(\cdot)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{k^2} dk. \quad (2)$$

Sie unterscheiden sich hinsichtlich der Auswertung der beiden Pole bei der zunächst vorzunehmenden Integration über k_0 . Insbesondere erhält man eine Funktion D_{ret} mit der Eigenschaft $D_{\text{ret}}(x) \equiv 0$ für $x_0 < 0$, wenn man den Integrationsweg in der k_0 -Ebene oberhalb der Pole wählt. Entsprechend eine Funktion D_{av} mit $D_{\text{av}}(x) \equiv 0$ für $x_0 > 0$, wenn man unterhalb der Pole bleibt. Für $\bar{D} = \frac{1}{2}(D_{\text{ret}} + D_{\text{av}})$ gilt ($P \cong$ Cauchyscher Hauptwert)

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{(2\pi^4)} P \int \frac{e^{ikx}}{k^2} dk = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) \quad (3)$$

und es ist

$$D_{\text{ret}}(x) = \begin{cases} 2\bar{D}(x) & \text{für } x_0 > 0 \\ 0 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}; \quad D_{\text{av}}(x) = \begin{cases} 0 & x_0 > 0 \\ 2\bar{D}(x) & x_0 < 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Weiterhin gilt für die Funktion $D = D_{\text{av}} - D_{\text{ret}}$

$$D(x) = -2 \frac{x_0}{|x_0|} \bar{D}(x) \quad \text{und} \quad \square D(x) = 0. \quad (5)$$

Durch \bar{D} sind demnach die übrigen Funktionen bestimmt. Die retardierten Potentiale der Maxwell'schen Theorie lassen sich dann in folgender Form schreiben:

$$A_\mu^{\text{ret}}(x) = \int D_{\text{ret}}(x - x') j_\mu(x') dx' \\ = \int \bar{D}(x - x') j_\mu(x') dx' - \frac{1}{2} \int D(x - x') j_\mu(x') dx'. \quad (6)$$

Der letzte Ausdruck entspricht einer Zerlegung,

$$A_\mu^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2}(A_\mu^{\text{ret}} + A_\mu^{\text{av}}) + \frac{1}{2}(A_\mu^{\text{ret}} - A_\mu^{\text{av}}).$$

*) Vgl. z. B. E. C. G. Stueckelberg, *Helv. phys. Acta* **11**, 225 (1938).

Bekanntlich kommen die Schwierigkeiten der klassischen Theorie des Elektrons in dem singulären Charakter der obigen Funktionen zum Ausdruck, und man ist deshalb bei Versuchen zu ihrer Behebung davon ausgegangen, diese Funktionen durch reguläre zu ersetzen. Dies sei hier unter folgenden Gesichtspunkten durchgeführt:

Es soll die Linearität der Theorie gewahrt bleiben. Dann werden wir sicherlich die Lösungen der modifizierten Feldgleichungen analog zu (6) mit Benutzung Greenscher Funktionen anschreiben können, wobei \bar{D} und eventuell D durch andere Funktionen ersetzt sind. Wir führen zunächst \bar{D} über in eine Funktion $\bar{F}(x)$. Dies soll eine lorentzinvariante Funktion sein, d. h. $\bar{F}(x) = \bar{F}(\sigma^2)$ mit $\sigma^2 = -x_\mu^2$. Weiterhin $\bar{F}(\sigma^2) \equiv 0$ für $\sigma^2 < 0$, da sonst nach (6) Wirkungen auftreten, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Dann sei $\bar{F}(\sigma^2)$ normiert, so daß

$$\int_0^\infty \bar{F}(\sigma^2) d(\sigma^2) = \frac{1}{4\pi}. \quad (7)$$

Schließlich verlangen wir, daß das Integral $\int_0^\infty |\bar{F}(\sigma)| d\sigma$; $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ existiert.

Jede derartige Funktion läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\bar{F}(\sigma) = \frac{1}{8\pi\sigma_0} \int_0^\infty J_1(\lambda\sigma) \lambda G(\lambda) d\lambda; \quad (8)$$

hierbei ist $G(\lambda)$ im wesentlichen die Hankeltransformierte 1. Ordnung von $\bar{F}(\sigma)$. Durch Umkehrung folgt

$$G(\lambda) = 8\pi \int_0^\infty J_1(\lambda\sigma) \sigma^2 \bar{F}(\sigma) d\sigma \quad (9)$$

und nach (7)

$$\int_0^\infty G(\lambda) d\lambda = 1. \quad (7')$$

Um die physikalische Bedeutung dieser Darstellung zu erkennen, betrachten wir ein reelles Vektorfeld mit einer Feldgleichung

$$(\square - \lambda^2) A_\mu(x; \lambda) = -j_\mu(x). \quad (10)$$

Die Lösungen dieser Gleichung seien wieder durch ihre Greenschen Funktionen $\Delta^{(1)}(x; \lambda)$ dargestellt. Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Funktionen Δ_{ret} , Δ_{av} , $\bar{\Delta}$ und Δ sind wie vorhin. Es gilt⁷⁾

$$\Delta^{(1)}(x; \lambda) = \frac{1}{(-\pi)^{1/2}} \int \frac{e^{ikx} dk}{k^2 + \lambda^2} \quad (11)$$

$$\bar{\Delta}(x; \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \delta(\sigma^2) - \frac{1}{2} \Theta^+(\sigma^2) \frac{\lambda}{\sigma} J_1(\lambda\sigma) \right\}. \quad (12)$$

Die retardierten Potentiale der Gl. (10) lauten

$$A_\mu^{\text{ret}}(x; \lambda) = \int \bar{\Delta}(x - x'; \lambda) j_\mu(x') dx' - \frac{1}{2} \int \Delta(x - x'; \lambda) j_\mu(x') dx'. \quad (13)$$

⁷⁾ Vgl. J. Schwinger, Physic. Rev. 75, 678 (1949).

Für die oben eingeführte Funktion $\bar{F}(x)$ folgt aus den angegebenen Formeln

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= \int_0^\infty \{\bar{D}(x) - \bar{A}(x; \lambda)\} G(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} P \int_0^\infty \int \frac{\lambda^2 G(\lambda) e^{ikx} dk d\lambda}{k^2 (k^2 + \lambda^2)}.\end{aligned}\quad (14)$$

Dies zeigt, daß wir jede unter den genannten Bedingungen mögliche Abänderung der Maxwell'schen Felder erhalten, wenn wir annehmen, daß der Viererstrom (bzw. die Elektronen) neben dem Maxwell'schen Feld Quelle von Feldern mit $\lambda^2 \neq 0$ ist, die sich mit einer Dichtefunktion $G(\lambda)$ linear überlagern.

Entsprechend dem Umstand, daß in der Darstellung (6) der retardierten Potentiale der Maxwell'schen Theorie die beiden Funktionen \bar{D} und D auftreten, ergeben sich zwei Möglichkeiten:

a) Es werden beide Funktionen auf analoge Weise abgeändert^{a)}, so daß $\bar{D} \rightarrow \bar{F}$ und $D \rightarrow F$ mit $F(x) = -2 \frac{x_0}{|x_0|} \bar{F}(x)$. Dann gilt

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \int \frac{\lambda^2 G(\lambda)}{k^2 (k^2 + \lambda^2)} e^{ikx} dk d\lambda \quad (15)$$

$$F(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int \frac{k_0}{|k_0|} \{\delta(k^2) - \delta(k^2 + \lambda^2)\} G(\lambda) e^{ikx} dk d\lambda. \quad (16)$$

Es existieren retardierte Potentiale

$$\begin{aligned}A_\mu^{\text{ret}}(x) &= \int \bar{F}(x-x') j_\mu(x') dx' - \frac{1}{2} \int F(x-x') j_\mu(x') dx' \\ &= \int F_{\text{ret}}(x-x') j_\mu(x') dx'.\end{aligned}\quad (17)$$

Dieses Vorgehen führt zu Folgerungen, die seine Verwendung ungeeignet erscheinen lassen; wir gehen darauf weiter unten ein.

b) Da das Maxwell'sche Feld $A_\mu^{\text{ret}} - A_\mu^{\text{av}}$ überall endlich ist, genügt es die Funktion \bar{D} zu modifizieren, nicht jedoch D ^{a)}. Dann erhält man

$$A_\mu(x) = \int \bar{F}(x-x') j_\mu(x') dx' - \frac{1}{2} \int D(x-x') j_\mu(x') dx'. \quad (18)$$

Diese Potentiale sind nicht retardiert, d. h. zum Potential $A_\mu(\tau, x_0)$ trägt nicht nur der Strom $j_\mu(\tau', x'_0)$ mit $x'_0 < x_0$ bei.

4. Die Feldgleichungen

Zur Untersuchung der Frage nach Feldgleichungen, aus denen die Lösungen (17) bzw. (18) folgen, verfahren wir folgendermaßen: Aus (14) erhält man, wenn zu-

^{a)} Dies entspricht dem Regularisierungsverfahren der Quantenelektrodynamik. Vgl. Pauli-Villars, l. c. Für die dort benutzte Funktion $\varrho(x)$ gilt $\varrho(\lambda^2) = \delta(\lambda^2) - \frac{G(\lambda)}{2\lambda}$.

^{a)} Vgl. Feynman u. McManus, l. c.

nächst über λ integriert wird

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{e^{ikx} dk}{k^2 \zeta(k^2)} \quad (19)$$

mit

$$\frac{1}{\zeta(k^2)} = P \int_0^\infty \frac{\lambda^2 G(\lambda)}{\lambda^2 + k^2} d\lambda. \quad (20)$$

Demnach $\square \bar{F}(x) = -\zeta^{-1}(x)$ mit $\zeta^{-1}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{e^{ikx} dk}{\zeta(k^2)}$

$$\square \int \zeta(x-x') \bar{F}(x') dx' = \square(\zeta, \bar{F}) = -\delta(x); \quad \bar{F} = (\zeta^{-1}, \bar{D}) \quad (21)$$

$$\text{mit } \zeta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \zeta(k^2) e^{ikx} dk^{(10)}.$$

Der durch (21) gegebene Zusammenhang legt die Frage nahe, ob man die betrachteten Potentiale aus einer Feldgleichung

$$\square A_\mu = -(\zeta^{-1}, j_\mu) \quad \text{bzw.} \quad \square(\zeta, A_\mu) = -j_\mu \quad (22)$$

gewinnen kann. Alle zugelassenen Funktionen ζ sind dabei durch (20) darstellbar, d. h. jeder solchen Funktion entspricht eine Funktion $\bar{F}(x)$ und eine Funktion $G(\lambda)$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) $G(\lambda)$ ist nur für eine diskrete Zahl von Werten des Arguments von Null verschieden. Dann folgt mit (7') und (20)

$$G(\lambda) = \sum c_i \delta(\lambda - \lambda_i^{(1)}), \quad \sum c_i = 1; \quad \frac{1}{\zeta(k^2)} = \sum \frac{c_i \lambda_i^2}{k^2 + \lambda_i^2}.$$

Feldgleichungen der Form (22) haben die retardierten Potentiale (17) als Lösungen, denn es gilt

$$F^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k^2} \left\{ \sum \frac{c_i \lambda_i^2}{k^2 + \lambda_i^2} \right\} e^{ikx} dk, \quad (23)$$

also

$$\square(\zeta, F_{\text{ret}}) = -\delta(x); \quad \square(\zeta, F) = 0.$$

Sie besitzen jedoch auch nichtretardierte Lösungen der Form (18), da man auch Greensche Funktionen von (22) erhält, wenn man in dem auf der rechten Seite von (23) stehenden Integral die Pole $k^2 = 0$ nach oben bzw. unten umgeht und für alle anderen Pole den Hauptwert nimmt. Wegen $\square(\zeta, \bar{F}) = -\delta(x)$ und $\square(\zeta, D) = 0$ sind also auch die Potentiale (18) Lösungen der Gl. (22).

Das einfachste Beispiel dieser Art, $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$, also

$$\square(\zeta, A_\mu) = \square \left(1 - \frac{\square}{\lambda_0} \right) A_\mu(x) = -j_\mu(x)$$

ist in der Literatur mehrfach behandelt worden (vgl. z. B. F. Bopp, Anm. 1a).

b) $G(\lambda)$ sei in einem endlichen Bereich von Null verschieden. Dann besitzt die Gl. (22) keine retardierten Lösungen*). Andernfalls müßten retardierte und avan-

¹⁰⁾ $\int \zeta(x-x') \zeta^{-1}(x'-x'') dx' = \delta(x-x'')$. Nach (20) ist $\frac{1}{\zeta(k^2)} = 1$ für $k^2 = 0$,

d. h. $\int \zeta^{-1}(x) dx = 1$.

¹¹⁾ Hierzu könnten noch Terme treten, die Ableitungen der δ -Funktion enthalten, und zu Polen höherer Ordnung in $1/(k^2)$ Anlaß geben.

*) Es wird hier vorausgesetzt, daß die Feldgleichungen invariant sind gegen Zeitumkehr, also $\zeta(x)$ nur von x_μ^2 abhängt. Dann folgt aus der Existenz einer retardierten Lösung die einer avancierten Lösung. Für den Fall, daß diese Forderung nicht gestellt wird, vgl. den Zusatz am Schluß dieser Arbeit. (Anm. b. d. Korrektur.)

cierte Greensche Funktionen g_{ret} und g_{av} existieren, aus denen man auf die übliche Art \bar{g} und g bilden kann. Zwischen diesen Funktionen müssen Beziehungen bestehen, die den Gln. (4) und (5) entsprechen. Nun gilt nach (19) für die in x_0 symmetrische Funktion $\bar{g} = \bar{F}$, demnach $g = g_{\text{av}} - g_{\text{ret}} = F$. Die letzte Funktion muß die homogene Gleichung erfüllen, also

$$k^2 \zeta(k^2) F(k) = 0.$$

Jedoch ist nach (20) $\zeta(k^2) \neq 0$ falls $G(\sqrt{-k^2})$ stetig ist, und nach (16) ist $F(k) \neq 0$ falls $G(\sqrt{-k^2}) \neq 0$ ist.

Die Annahme der Existenz retardierter Lösungen führt also zu einem Widerspruch, falls $G(\lambda)$ in einem endlichen Bereich stetig und ungleich Null ist.

Hingegen sind die Potentiale (18) stets Lösungen von (22), denn es gilt immer

$$\square(\zeta, \bar{F}) = -\delta(x); \quad \square(\zeta, D) = 0.$$

Wir bemerken noch, daß $1/\zeta(k^2)$ überall endlich ist, falls $G(\lambda)$ eine stetige Funktion ist.

Die anfangs aufgestellten Bedingungen für $\bar{F}(x)$ genügen, um eine endliche Selbstenergie des Elektrons zu erreichen. Wir werden jedoch weiterhin verlangen, daß die Strahlung eines beschleunigten Elektrons durch den Maxwell'schen Ausdruck gegeben ist. Andernfalls würde eine Emission negativer Energien oder beobachtbare avancierte Wirkungen auftreten. Es wird sich zeigen, daß man dieser Forderung mit den unter (a) betrachteten Funktionen $G(\lambda)$ nicht genügen kann. Dies ist jedoch möglich mit den unter (b) diskutierten Ausdrücken für $G(\lambda)$ bei Gültigkeit der Feldgleichungen (22), die dann also keine retardierten Lösungen besitzen. Weiterhin ist es zweckmäßig, die Funktion $\bar{F}(x)$ so zu wählen, daß sie wenig von $\bar{D}(x)$ abweicht. Ein naheliegender Ansatz ist

$$\bar{F}(\sigma) = \frac{1}{4\pi a^2} \Theta^+(\sigma^2) e^{-\frac{\sigma^2}{a^2}} \quad (24)$$

mit a von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius. Hieraus folgt

$$G(\lambda) = \frac{a^2}{2} \lambda e^{-\frac{a^2 \lambda^2}{4}}; \quad \frac{1}{\zeta(k^2)} = 1 + \frac{a^2 k^2}{4} e^{\frac{a^2 k^2}{4}} \operatorname{li}\left(e^{-\frac{a^2 k^2}{4}}\right).$$

5. Vergleich mit anderen Darstellungen

Die zuletzt angegebenen Bedingungen, nach denen die Felder durch (22) und (18) bestimmt sind, unter Ausschluß der in Abschn. 4a betrachteten Funktionen $G(\lambda)$, entsprechen den von Feynman²⁾ und McManus³⁾ vorgeschlagenen Formulierungen. Die beiden Arbeiten unterscheiden sich hinsichtlich der Bewegungsgleichungen für Elektronen, auf die wir noch eingehen.

Im statischen Fall unterscheiden sich die Lösungen (17) und (18) nicht. Man erhält für das Potential einer ruhenden Punktladung mit $j_0 = e \delta(x)$ in jedem Fall

$$\begin{aligned} A_0(r) &= e \int \bar{F}(-r^2 + x_0'^2) dx_0' \\ &= \frac{e}{8\pi} \int_0^\infty \int \frac{J_1(\lambda \sqrt{x_0'^2 - r^2})}{\sqrt{x_0'^2 - r^2}} \lambda G(\lambda) dx_0' d\lambda \\ A_0(r) &= \frac{e}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r} \{1 - e^{-r\lambda}\} G(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (25)$$

also die entsprechende Überlagerung von Coulomb- und Yukawapotentialen. Dies Potential ist überall endlich, denn

$$A_0(0) = e \int \bar{F}(+x_0'^2) dx_0' = \frac{e}{4\pi} \int_0^\infty \lambda G(\lambda) d\lambda. \quad (26)$$

Die Formel (25) ist nach (20) dem von Bopp^{1c)} und McManus³⁾ angegebenen Ausdruck

$$A_0(r) = \frac{e}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin(|\mathbf{t}| r)}{|\mathbf{t}| \zeta(t^2, 0)} d|\mathbf{t}|$$

äquivalent.

McManus betrachtet insbesondere Funktionen $\bar{F}(x^2) = \bar{F}(|x^2|)$, einen Fall, den wir ausgeschlossen hatten. Man kann sich von der Beschränkung $\bar{F}(x^2) \equiv 0$ für $x^2 > 0$ freimachen. Alle dann in Frage kommenden Funktionen $\bar{F}(x^2)$ lassen sich darstellen als

$$\bar{F}(x^2) = \bar{F}_1(x^2) + \bar{F}_2(x^2); \quad \bar{F}_1(x^2) \equiv 0 \text{ für } x^2 = -\sigma^2 > 0$$

$$\bar{F}_1(\sigma) = \frac{1}{8\pi\sigma} \int_0^\infty J_1(\lambda\sigma) \lambda G_1(\lambda) d\lambda; \quad \bar{F}_2(x^2) \equiv 0 \text{ für } x^2 = \tau^2 < 0$$

$$\bar{F}_2(\tau) = \frac{1}{8\pi\tau} \int_0^\infty J_1(\mu\tau) \mu G_2(\mu) d\mu; \quad \begin{aligned} \sigma &= +\sqrt{\sigma^2} \\ \tau &= +\sqrt{\tau^2} \end{aligned}$$

mit

$$\int_0^\infty \{G_1(\lambda) + G_2(\lambda)\} d\lambda = 1.$$

Weiterhin beachten wir, daß man die Greenschen Funktionen $\Delta^{(\cdot)}(x; \mu)$ der Gleichung

$$(\square + \mu^2) A_\mu(x; \mu) = -j_\mu(x)$$

erhält, indem man in $\Delta^{(\cdot)}(x; \lambda)$ σ durch τ , bzw. im Fourierintegral λ^2 durch $-\mu^2$ ersetzt. So ist

$$\bar{\Delta}(x; \mu) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \delta(\tau^2) - \frac{1}{2} \Theta^+(\tau^2) \frac{\mu}{\tau} J_1(\mu\tau) \right\}.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \bar{D}(x) - \int_0^\infty \bar{\Delta}(x; \lambda) G_1(\lambda) d\lambda - \int_0^\infty \bar{\Delta}(x; \mu) G_2(\mu) d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{1}{k^2} \left\{ 1 - k^2 \left(\int_0^\infty \frac{G_1(\lambda) d\lambda}{k^2 + \lambda^2} + \int_0^\infty \frac{G_2(\mu) d\mu}{k^2 - \mu^2} \right) \right\} e^{ikx} dk \end{aligned}$$

und mit

$$\frac{1}{\zeta(k^2)} = 1 - k^2 \left\{ P \int_0^\infty \frac{G_1(\lambda) d\lambda}{k^2 + \lambda^2} + P \int_0^\infty \frac{G_2(\mu) d\mu}{k^2 - \mu^2} \right\}$$

ergeben sich wieder die Feldgleichungen (22) mit den Lösungen (18). Wir betrachten jedoch im folgenden nur Funktionen $\bar{F}(x^2) \equiv 0$ für $x^2 > 0$, die nicht auf Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit führen.

6. Der Energie-Impuls-Tensor

Nachdem bisher die Felder betrachtet wurden, wenden wir uns den Energieverhältnissen und der Emission von Strahlung zu. Die Gültigkeit des Energie-Impulssatzes ist ja gesichert, wenn wir einen Tensor angeben, dessen Divergenz als Kraft-Leistungsdichte für die Bewegung der Ladungen benutzt wird. Es liegt nahe, hierfür den Ansatz

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = -f_{\mu\nu} j_\nu$$

der Maxwell'schen Theorie zu übernehmen, mit dem durch (17) oder (18) bestimmten Feld $f_{\mu\nu}(x)$. Dies läßt sich erreichen, indem man analog zur Überlagerung der Teilfelder $A_\mu(x; \lambda)$ auch die diesen Feldern entsprechenden Energien linear überlagert. Dann ist¹²⁾

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \int_0^\infty \{T_{\mu\nu}(x; 0) - T_{\mu\nu}(x; \lambda)\} G(\lambda) d\lambda \\ T_{\mu\nu}(x; \lambda) &= f_{\mu e}(x; \lambda) f_{\nu e}(x; \lambda) + \lambda^2 A_\mu(x; \lambda) A_\nu(x; \lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} f_{e\sigma}(x; \lambda) f_{e\sigma}(x; \lambda) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} A_e^2(x; \lambda). \end{aligned} \quad (27)$$

Die Felder $A_\mu(x; \lambda)$ sind Lösungen der Gl. (10).

Falls das Gesamtfeld durch (17) gegeben ist, hat man für $A_\mu(x; \lambda)$ den Ausdruck $A_\mu^{\text{ret}}(x; \lambda)$ einzusetzen. Dann findet eine Emission von Strahlung negativer Energie statt, was zu schwerwiegenden Folgerungen führt¹³⁾. Der Energiesatz gilt mit (27) auch für stetiges $G(\lambda)$. Wenn man allerdings verlangt, daß der Energiefluß in großer Entfernung von einer Quelle praktisch Maxwell'sch ist, da dies für die Felder zutrifft, so stößt man auf die von Feynman erwähnte Schwierigkeit. Der Tensor (27) trägt der veränderten Strahlungsdämpfung durch eine entsprechende Änderung des Energieflusses Rechnung. Wegen der in Emission auftretenden negativen Energien werden wir künftig diesen auf den Funktionen \bar{F} und F basierenden Ansatz ausschließen.

Im anderen Fall führt der Tensor mit

$$A_\mu(x; \lambda) = \frac{1}{2} \{A_\mu^{\text{ret}}(x; \lambda) + A_\mu^{\text{av}}(x; \lambda)\}; \quad \lambda \neq 0$$

bei beschleunigter, nicht-periodischer Bewegung eines Elektrons auf beobachtbare avancierte Effekte, da sich der Energiefluß linear aus den entsprechenden Ausdrücken für die Teilfelder zusammensetzt. Eine Theorie, die als effektives Feld den obigen Ausdruck für $A_\mu(x; \lambda)$ benutzt, schließt jedoch derartige Wirkungen ein.

Indessen läßt sich hier im Anschluß an Untersuchungen von Heisenberg¹⁴⁾ und Bopp¹⁵⁾ ein anderer Tensor angeben, durch den die Theorie einen Fernwirkungscharakter erhält. Vorausgesetzt wird, daß die Feldgleichungen die Form (22) haben. Es sei

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} f_{\mu\sigma}(\zeta) f_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \int f_{\mu\sigma}(x') \partial'_\nu \chi_\sigma(x, x') dx' - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} f_{e\sigma}(\zeta) f_{e\sigma} \quad (28)$$

mit

$$\partial_\nu \partial'_\nu \chi_\sigma(x, x') = \partial_\nu \zeta(x - x') f_{\nu\sigma}(x) - \delta(x - x') j_\sigma(x);$$

¹²⁾ $\delta_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$; $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$; $\delta_{00} = -1$.

¹³⁾ Vgl. R. P. Feynman, l. c.

¹⁴⁾ W. Heisenberg, Z. Naturforsch. 1, 608 (1946).

¹⁵⁾ F. Bopp, Z. Naturforsch. 1, 237 (1946). Der von Bopp (Anm. 1c) benutzte Tensor stimmt hinsichtlich Gesamtenergie mit dem hier verwendeten überein.

d. h.

$$\chi_{\sigma}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{i k'_\nu \zeta(k') f_{\nu\sigma}(k + k') + j_\sigma(k + k')}{k_\tau k'_\tau} e^{i(kx + k'x')} dk dk'.$$

Es gilt

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = -f_{\mu\nu} j_\nu.$$

Im Maxwellschen Fall $\zeta(x - x') = \delta(x - x')$ geht $T_{\mu\nu}$ in den üblichen Ausdruck über. Durch die Abänderung geht die Symmetrie des Tensors verloren. Für die Gesamtenergie

$$E = \int T_{00}(x) d^3x = \frac{1}{2\pi} \int T_{00}(0, k_0) e^{-ik_0 x_0} dk_0$$

findet man aus (28)

$$E = \frac{1}{2} \left[\int \{ \partial_0 A_\sigma \partial_0 (\zeta, A_\sigma) + \partial_i A_\sigma \partial_i (\zeta, A_\sigma) + 2 A_0 j_0 \} d^3x \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{x_0} \{ \partial'_0 A_\sigma(x, x'_0) j_\sigma(x, x'_0) - \partial'_0 (\zeta, A_\sigma) (\zeta^{-1}, j_\sigma) \} dx'_0 d^3x \right]. \quad (29)$$

Dies geht ebenfalls für $\zeta(x - x') = \delta(x - x')$ in den Ausdruck der Maxwell'schen Theorie über. Hinsichtlich des letzten Terms, der ein zeitliches Integral über Feldgrößen enthält, bemerken wir, daß diese Integration sich tatsächlich nur über einen kleinen Zeitraum erstreckt. Denn es gilt

$$\int \zeta(x - x') \zeta^{-1}(x' - x'') d^3x' dx'_0 = \delta(x - x'').$$

Hierbei liefern (falls $\bar{F}(\sigma^2)$ nur für kleine Werte des Arguments wesentlich von Null abweicht) nur Gebiete mit $x'_0 \approx x_0 \approx x''_0$ einen erheblichen Beitrag, so daß es genügt, über einen entsprechenden Bereich von x'_0 zu integrieren. Das bedeutet für den Energieausdruck, daß der letzte Term nicht einen mit der Zeit wachsenden Anteil liefert, sondern sich in kurzen Zeiten stets wieder ausgleicht.

Für eine ruhende Punktladung ist $E = \frac{1}{2} A_0(0)$.

Weiterhin verschwinden mit diesem Tensor die Eigenspannungen des Elektrons; auf eine ruhende Punktladung wirken keine Kräfte. Dies erkennt man durch leichte Verallgemeinerung einer von Pais¹⁶⁾ vorgenommenen Rechnung.

7. Die Strahlung beschleunigter Elektronen

Von wesentlicher Bedeutung für die Brauchbarkeit der hier behandelten Theorie ist die Frage der Strahlung, die von einem beschleunigten Elektron emittiert wird. Es ist zu verlangen, daß die $\lambda^2 \neq 0$ entsprechenden Feldkomponenten nicht zu einem Energiefluß durch eine hinreichend weit von dem betrachteten Elektron entfernte, um dieses geschlossene Fläche führen. Ein derartiger Fluß würde zu beobachtbaren avancierten Wirkungen Anlaß geben. Denn für die am Ort des Teilchens berechnete Strahlungsdämpfung ergibt sich der übliche Ausdruck, da das Feld $A_\mu^{\text{ret}} - A_\mu^{\text{av}}$ ungeändert gegen die Maxwellsche Theorie ist. Eine etwaige Änderung der ausgestrahlten Energie müßte also durch einlaufende avancierte Wellen kompensiert werden.

Es läßt sich jedoch zeigen, daß bei geeigneter Wahl von $G(\lambda)$ tatsächlich nur das Maxwellsche Feld zur Emission beiträgt. Hierzu betrachten wir die Lö-

¹⁶⁾ A. Pais, On the Theory of Elementary Particles. Kon. Ned. Akad. v. Wet., Verh. D 1, XIX, Nr. 1, S. 61.

sungen der Wellengleichung

$$(\square - \lambda^2) A_\mu = -j_\mu.$$

Nach Stueckelberg¹⁷⁾ lassen sich diese schreiben:

$$A_\mu^{\text{ret}}(x) = \int A_{\mu\omega}^{\text{ret}}(x) d\omega; \quad j_\mu(x) = \int j_{\mu\omega}(x) d\omega.$$

Für die Ausstrahlung kommen nur Frequenzen $\omega^2 > \lambda^2$ in Betracht. Für diese ist

$$A_{\mu\omega}^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-i\frac{\omega}{|\omega|}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} j_{\mu\omega}(\mathbf{r}', x_0) d^3x'.$$

Die Weltlinie des Elektrons sei gegeben durch

$$q(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int q(\omega) e^{i\omega x_0} d\omega = \int q_\omega(x_0) d\omega.$$

Hieraus folgt für die Potentiale in großer Entfernung vom Elektron

$$\begin{aligned} A_{i\omega}^{\text{ret}}(x) &= \frac{e}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial x_0} q_\omega(x_0 - |\omega| |\mathbf{r}|); \\ A_{0\omega}^{\text{ret}}(x) &= -\frac{e}{4\pi r} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{q}(\omega)) \frac{\partial}{\partial r} q_\omega(x_0 - |\omega| |\mathbf{r}|). \end{aligned} \quad (30)$$

Für die avancierte Lösung geht lediglich $\omega(x_0 - \frac{|\mathbf{r}|}{|\omega|}r)$ in $\omega(x_0 + \frac{|\mathbf{r}|}{|\omega|}r)$ über.

Es ist zu zeigen, daß die von den Feldern mit $\lambda^2 \neq 0$ herrührenden Potentiale stärker als mit $1/r$ abfallen; also nicht zur Ausstrahlung beitragen. Wir benötigen nur die Tatsache, daß $A_{\mu\omega}(x; \lambda)$ von $q_\omega(x_0 \mp |\omega| |\mathbf{r}| r)$ abhängt.

Die Zusatzpotentiale stellen sich dar als

$$\int A_{\mu\omega}(x; \lambda) G(\lambda) d\lambda d\omega. \quad (31)$$

Die Integration über λ ist dabei von 0 bis $\lambda_0 \leq \omega$ zu erstrecken. Im Sinne der obigen Forderung dürfen demnach die Integrale

$$\int_0^{\lambda_0} \cos\{r\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\} G(\lambda) d\lambda \quad (32)$$

nur Beiträge liefern, die mit $1/r$ oder stärker abfallen. Für Funktionen $G(\lambda) = \sum c_i \delta(\lambda - \lambda_i)$ ist dies offenbar nicht der Fall. Für beliebiges $G(\lambda)$ betrachten wir das erste dieser Integrale

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\lambda_0} \cos(r\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}) G(\lambda) d\lambda = \int_\alpha^\omega z \cos rz \tilde{G}(z) dz \\ \tilde{G}(z) &= \frac{G(\sqrt{\omega^2 - z^2})}{\sqrt{\omega^2 - z^2}}; \quad d = \sqrt{\omega^2 - \lambda_0^2} \end{aligned}$$

und entwickeln $\tilde{G}(z)$ nach z an einer Stelle z_0 . Dann wird

$$J = \int_\alpha^\omega z \cos rz \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \tilde{G}(z_0) \right\} dz.$$

¹⁷⁾ Helv. Phys. Acta 14, 62 (1941).

Nun ist

$$\int_{\alpha}^{\omega} z^m \cos r z dz = \frac{1}{r} \{ \omega^m \sin r \omega - \alpha^m \sin r \alpha \} + o\left(\frac{1}{r}\right);$$

demnach

$$J = \frac{1}{r} \left\{ \omega \sin \omega r \left[\frac{G(\lambda)}{\lambda} \right]_{\lambda \rightarrow 0} - \alpha \sin \alpha r \frac{G(\lambda_0)}{\lambda_0} \right\} + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Falls $G(\lambda)$ so beschaffen ist, daß es die vorgenommene Entwicklung erlaubt, erhält man das gewünschte Resultat. Da man den Integrationsbereich unterteilen kann, somit nicht die Konvergenz der Reihe im ganzen Gebiet braucht, wird dies im allgemeinen der Fall sein; vorausgesetzt, daß $\lim_{\lambda \rightarrow 0} G(\lambda)/\lambda$ endlich ist.

Man sieht sofort, daß z. B. der Ansatz (24) die Bedingungen erfüllt. Eine analoge Betrachtung kann man für das zweite Integral durchführen.

Man darf demnach für die Ausstrahlung mit den Maxwell'schen Feldern rechnen. Diese genügen der Feldgleichung (1), so daß man den Energie-Impuls-Tensor für die betrachteten großen Entfernungen vom Elektron in den Maxwell'schen Ausdruck umformen kann. Folglich wirkt die Modifikation der Maxwell'schen Theorie sich nicht auf die Emission aus.

8. Die Bewegungsgleichungen der Elektronen

Da bei der Abänderung der Maxwell'schen Theorie die Ausdrücke für die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors und für die auf ein Elektron wirkende Kraft-Leistungsdichte zunächst nicht bekannt sind, besteht eine Willkür in der Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Demzufolge sind in der Literatur zwei Ansätze betrachtet worden. Bopp¹⁾ und Feynman²⁾ verwenden die Form¹⁸⁾

$$m_0 \frac{dv_\mu(s)}{ds} = e f_{\mu\nu} v_\nu \quad \begin{array}{l} v_\nu = \text{Vierergeschwindigkeit} \\ s = \text{Eigenzeit,} \end{array} \quad (33)$$

während McManus³⁾ von

$$m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e (\zeta^{-1} f_{\mu\nu}) v_\nu \quad (34)$$

ausgeht¹⁹⁾. Beide Gleichungen lassen sich aus Variationsprinzipien gewinnen. Wir betrachten zunächst, nach der Methode von Bopp und McManus, den ersten Ausdruck und zeigen dann, daß der zweite sich hierauf zurückführen läßt.

Für die Bewegung eines Elektrons in seinem Eigenfeld gilt mit (33) und (18)

$$m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e^2 v_\nu \int \left\{ v'_\nu \frac{\partial}{\partial z_\mu} - v'_\mu \frac{\partial}{\partial z_\nu} \right\} [\bar{F}(z-z') - \frac{1}{2} D(z-z')] ds' \quad (35)$$

mit

$$z'_\mu = z_\mu(s'); \quad v'_\mu = v_\mu(s') = \frac{d}{ds'} z_\mu(s').$$

Der 2. Term der eckigen Klammer gibt die Strahlungskraft

$$\frac{2}{3} e^2 \{ \ddot{v}_\mu + \dot{v}^2 v_\mu \}. \quad (36)$$

¹⁸⁾ Die mechanische Masse m_0 des Elektrons kann gleich Null gesetzt werden.

¹⁹⁾ Einen Energie-Impuls-Tensor mit der entsprechenden Divergenz kann man analog zu (28) bilden.

Der 1. Term wird durch Entwicklung nach der Retardierung $s - s' = \tau$ ausgewertet. Das 1. Glied dieser Entwicklung lautet

$$-\frac{e^2}{2} \dot{v}_\mu \int \bar{F}(+\sigma^2) d\sigma = -m_e \dot{v}_\mu$$

und entspricht einer elektromagnetischen Masse m_e des Elektrons

$$m_e = \frac{e^2}{2} \int \bar{F}(+\sigma^2) d\sigma = \frac{e^2}{8\pi_0} \int_0^\infty \lambda G(\lambda) d\lambda = \frac{e}{2} A_0(0). \quad (37)$$

Die weiteren Glieder kann man unter der Voraussetzung, daß $\bar{F}(\sigma^2)$ für große Werte des Arguments exponentiell verschwindet, auf die Form

$$e^2 \sum_1^\infty v^{(2n+1)} \int \sigma^{2n} \bar{F}(\sigma^2) d\sigma \quad (38)$$

bringen. ($v^{(2n+1)}$ enthält Ableitungen von v bis zur $(2n+1)$ -ten Ordnung). Falls die Voraussetzung nicht erfüllt ist, scheint es fraglich, ob die Entwicklung eine sinnvolle Näherung darstellt.

Die höheren Glieder werden bei starken Beschleunigungen eine Rolle spielen; in nichtrelativistischer Näherung kann man nach Bopp^{1c)} eine Bedingung für Massenstabilität formulieren.

Für die Form (34) der Bewegungsgleichungen ergibt sich analog, daß (35) und alle folgenden Formeln gelten, wenn man überall $\bar{F}(\sigma^2)$ durch $\bar{H}(\sigma^2) = (\zeta^{-1}, \bar{F})$ ersetzt. Die beiden Ansätze unterscheiden sich also dadurch, daß in der 2. Formulierung die Funktion $\bar{F} = (\zeta^{-1}, \bar{D})$ nochmals mit ζ^{-1} transformiert wird. Demnach ist die erste Form der Abänderung der Maxwell'schen Theorie durch die Funktion \bar{F} , die zweite durch \bar{H} charakterisiert, da alle Wirkungen hierdurch bestimmt sind.

Nun erfüllt $\bar{H}(x)$ ebenfalls die eingangs an $\bar{F}(x)$ gestellten Forderungen. Es ist

$$\begin{aligned} \bar{H}(\sigma) &= \frac{1}{8\pi_0 \sigma} \int_0^\infty \lambda G_1(\lambda) J_1(\lambda \sigma) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \{\bar{D}(x) - \bar{D}(x; \lambda)\} G_1(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (39)$$

mit

$$G_1(\lambda) = 2 G(\lambda) P \cdot \int_0^\infty \frac{\mu^2 G(\mu)}{\mu^3 - \lambda^2} d\mu; \quad \int_0^\infty G_1(\lambda) d\lambda = 1. \quad (40)$$

Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \bar{H}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{e^{ikx} dk}{k^2 \zeta^2(k^2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int_0^\infty \int \frac{\lambda^2 \mu^2 G(\lambda) G(\mu) e^{ikx}}{k^2 (k^2 + \lambda^2) (k^2 + \mu^2)} dk d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} P \int_0^\infty \int \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{2\mu^2}{(k^2 + \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)} \right\} G(\lambda) G(\mu) e^{ikx} dk d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} P \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \lambda^2} \right\} G_1(\lambda) e^{ikx} dk d\lambda. \end{aligned}$$

Der Übergang zur letzten Formel ist möglich, da bei beliebiger, normierter Funktion $G(\lambda)$ auch die in (40) angegebene Funktion $G_1(\lambda)$ normiert ist. Denn ²⁰⁾

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_1(\lambda) d\lambda &= 2 P \int_0^\infty \frac{\mu^2 G(\mu) G(\lambda)}{\mu^2 - \lambda^2} d\mu d\lambda \\ &= -\frac{i}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ \mu^2 e^{i\alpha(\mu^2 - \lambda^2)} + \lambda^2 e^{-i\alpha(\mu^2 - \lambda^2)} \right\} \frac{\alpha}{|\alpha|} d\alpha d\mu d\lambda \\ &= \int_0^\infty (\mu^2 - \lambda^2) \sin[\alpha(\mu^2 - \lambda^2)] d\alpha G(\mu) G(\lambda) d\mu d\lambda \\ &= \int_0^\infty G(\lambda) G(\mu) d\mu d\lambda = 1. \end{aligned}$$

Der zweite Ansatz für die Bewegungsgleichungen ergibt deshalb nichts Neues. Man erhält dieselben Ergebnisse, wenn man die erste Form benutzt, jedoch $\bar{F}(x)$ nicht durch die Funktion $G(\lambda)$, sondern mit $G_1(\lambda)$ bestimmt.

9. Eine zweite, äquivalente Formulierung der Theorie

Wir sind bisher stets von einer Abänderung der Maxwell'schen Feldgleichungen ausgegangen. Die gleichen Ergebnisse lassen sich jedoch erzielen, wenn man diese Gleichungen ungeändert läßt und die Modifikation des Kopplungsansatzes in den Bewegungsgleichungen der Elektronen vornimmt. Es sei also

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x)$$

und

$$A_\mu^{\text{ret}}(x) = \int \bar{D}(x-x') j_\mu(x') dx' - 1/2 \int D(x-x') j_\mu(x') dx'.$$

als Bewegungsgleichung gelte

$$m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e (\zeta^{-1}, f_{\mu\nu}) v_\nu.$$

Hier sei $\zeta^{-1}(x)$ eine lorentzinvariante Funktion mit $\zeta^{-1}(\sigma^2) \equiv 0$ für $\sigma^2 < 0$ und $\int \zeta^{-1}(x) dx = 1$. Weiterhin soll das Integral

$$\int_0^\infty |(\zeta^{-1}, \bar{D})| d\sigma$$

existieren. Mit $(\zeta^{-1}, \bar{D}) = \bar{F}$ und $(\zeta^{-1}, D) = D$ folgt

$$m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e^2 v_\nu \int \left\{ v'_\nu \frac{\partial}{\partial z_\mu} - v'_\mu \frac{\partial}{\partial z_\nu} \right\} [\bar{F}(z-z') - \frac{1}{2} D(z-z')] ds',$$

d. h. Gl. (35). Wir können deshalb alles im Anschluß an diese Gleichung Gesagte übernehmen. Für $\bar{F}(x)$ gilt die Formel (14), in der $G(\lambda)$ durch (9) bestimmt ist. Einen Tensor mit der gewünschten Divergenz

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = -(\zeta^{-1}, f_{\mu\nu}) j_\nu$$

erhält man, wenn in (28) $f_{\mu\nu}$ durch $(\zeta^{-1}, f_{\mu\nu})$ und $(\zeta, f_{\mu\nu})$ durch $f_{\mu\nu}$ ersetzt wird.

²⁰⁾ $P \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2} = -\frac{i}{2} \int e^{i\alpha(\mu^2 - \lambda^2)} \frac{\alpha}{|\alpha|} d\alpha$. Vgl. J. Schwinger, l. c.

Ein derartige Ansatz ist also vollständig dem vorhin betrachteten äquivalent, da die wirkende Kräfte gleich sind. Der Anblick der ihnen entsprechenden Feld- und Bewegungsgleichungen zeigt, daß lediglich die Kopplung an anderer Stelle geändert wurde. Es gilt

$$\square(\zeta, A_\mu) = -j_\mu; \quad m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e f_{\mu\nu} v_\nu, \quad (41)$$

im anderen Falle

$$\square A_\mu = -j_\mu; \quad m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e(\zeta^{-1}, f_{\mu\nu}) v_\nu. \quad (42)$$

Der vorhin untersuchte Ansatz (34) nimmt die Änderung der Kopplung an beiden Stellen vor:

$$\square(\zeta, A_\mu) = -j_\mu; \quad m_0 \frac{dv_\mu}{ds} = e(\zeta^{-1}, f_{\mu\nu}) v_\nu. \quad (43)$$

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die drei diskutierten Kopplungsansätze zu den gleichen Folgerungen führen.

10. Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit untersuchte Formulierung einer klassischen Theorie des Elektrons führt zu einer endlichen Selbstenergie und zu einem Verschwinden der Eigenspannungen. Hierfür muß man das Auftreten negativer Energien in Kauf nehmen, die jedoch nicht in Emission auftreten. Dies wird ermöglicht durch einen Ansatz für den Energie-Impuls-Tensor, durch den die Theorie einen Charakter erhält, der über eine bloße Überlagerung von vektoriellen Feldern hinausgeht. Dies hat zur Folge, daß das wirksame Feld nicht in Strenge retardiert ist. Für die Emission ergeben sich keine avancierten Effekte. Weiterhin spielen für die Bewegung stark beschleunigter Elektronen höhere Zeitableitungen der Geschwindigkeit eine Rolle, deren Einfluß schwer zu übersehen ist.

Zusatz bei der Korrektur: Im Text wurden die retardierten Potentiale (17) nicht mehr betrachtet, da sich in Ermangelung von Feldgleichungen, denen diese Potentiale genügen, kein Energie-Impulstensor angeben ließ, der eine Ausstrahlung negativer Energien vermeidet. Dies Resultat ist beschränkt auf Feldgleichungen, die invariant sind gegen Zeitumkehr. Wenn man diese Forderung aufgibt, so läßt sich auch für die retardierten Potentiale eine Feldgleichung angeben.

Aus $F_{\text{ret}} = \bar{F} - \frac{1}{2}F$ erhält man unter Benutzung der Fouriertransformierten dieser Funktionen bei stetiger Funktion $G(\lambda)$

$$\square(\varepsilon, F_{\text{ret}}) = -\delta(x)$$

mit

$$\frac{1}{\varepsilon(k)} = \frac{1}{\zeta(k^2)} + \frac{i\pi}{2} \frac{k_0}{|k_0|} \sqrt{-k^2} G(\sqrt{-k^2}).$$

Demnach genügen die Potentiale (17) einer Gleichung $\square(\varepsilon, A_\mu) = -j_\mu$. Es existiert jedoch keine avancierte Lösung. Die Funktion F_{av} ist Greensche Funktion einer anderen Gleichung, für die in $1/\varepsilon(k)$ der Term $+\frac{i\pi}{2} \frac{k_0}{|k_0|} \sqrt{-k^2} G(\sqrt{-k^2})$ durch $-\frac{i\pi}{2} \frac{k_0}{|k_0|} \sqrt{-k^2} G(\sqrt{-k^2})$ zu ersetzen ist.

Unter Benutzung der Gleichung $\square(\varepsilon, A_\mu) = -j_\mu$ läßt sich nun für die retardierten Potentiale (17) ein Energie-Impulstensor mit $\partial_\nu T_{\mu\nu} = -f_{\mu\nu} j_\nu$ bilden, indem man in Formel (28) die Funktionen ζ und ζ^{-1} durch ε und ε^{-1} ersetzt. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 7 folgt dann, daß die Ausstrahlung durch den Maxwell'schen Ausdruck gegeben ist, also keine Emission negativer Energien stattfindet. Energie- und Impulssatz sind durch den Ansatz (33) für die Bewegungsgleichungen gewährleistet. In Formel (35) ist D durch F zu ersetzen.

Es läßt sich dann zeigen*), daß der mit F gebildete Teil der Lorentzkraft Anlaß gibt zu einer auch im zeitlichen Mittel nicht verschwindenden Energieänderung des Elektrons. Jedoch wird nach dem obigen Resultat nur der durch D bestimmte Teil der Energie über eine weit entfernte Fläche ausgestrahlt.

Demnach führt die Betrachtung von Feldgleichungen, die nicht invariant sind gegen Zeitumkehr, zu folgenden Konsequenzen:

Die wirksamen Felder sind in Strenge retardiert. Negative Energien treten nicht in Emission auf. Es findet ein Energieaustausch zwischen Partikeln und Feld statt, der auch im zeitlichen Mittel nicht verschwindet, jedoch nicht einer Emission entspricht. Dieser Umstand bedarf einer genaueren Untersuchung.

Für einen Hinweis auf diese Fragen bin ich Herrn Dr. G. Höhler zu Dank verpflichtet.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Hund für sein Interesse an dieser Arbeit und für wertvolle Diskussionen danken.

*) Vgl. F. Bopp, Anm. 1a), b).

Jena, Theor.-Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 7. September 1950.)

Annäherung von rotationssymmetrischen Potentialfeldern mit zylindrischen Äquipotentialflächen durch eine analytische Funktion

Von Friedrich Lenz

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird gezeigt, daß rotationssymmetrische Potentialfelder mit zylindrischen Äquipotentialflächen, wie sie z. B. bei Elektronenlinsen vorkommen, in großer Entfernung von der Linsenmitte exponentiell abklingen. Eine Funktion wird angegeben, welche dieser Tatsache Rechnung trägt und bei magnetischen Feldern die Feldverteilung in analytischer Abhängigkeit von den Polschuhabmessungen in guter Näherung wiedergibt. Die Güte der Näherung wird für symmetrische Felder sowie für ein unsymmetrisches durch Vergleich mit numerisch berechneten Feldverteilungen in Schaubildern veranschaulicht.

Wenn das Potential $\Phi(z)$ längs der Achse eines rotationssymmetrischen Feldes vorgegeben ist, so folgt aus der Forderung, daß die Potentialverteilung $V(r, z)$ im ganzen Raum der Potentialgleichung genügt, daß

$$V(r, z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Phi^{(2n)}(z) \quad (1)$$

sein muß. Wenn wir daher den Abfall eines Feldes berechnen wollen, welches für große z eine Zylinderfläche von Innendurchmesser b als Äquipotentialfläche besitzt, so muß gelten

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{b}{4}\right)^{2n} \Phi^{(2n)}(z) = \text{const. für große } z. \quad (2)$$

Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir für $r = b/2$ dem Potential den Wert Null erteilen. Dann gilt die lineare homogene Differentialgleichung

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{b}{4}\right)^{2n} \Phi^{(2n)}(z) = 0, \quad (3)$$

welche durch den Ansatz

$$\Phi = \Phi_0 e^{-2\alpha z/b} \quad (4)$$

gelöst wird, wenn

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} = 0 \text{ ist.} \quad (5)$$

Der links stehende Ausdruck in (5) ist aber gerade die Besselsche Funktion J_0 vom Argument a . Wenn wir also statt Gl. (4) eine Summe von Gliedern

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k e^{-2a_k z/b} \quad (6)$$

schreiben, so ist Gl. (6) eine Lösung der Differentialgleichung (3), wenn die a_k die Nullstellen der Besselschen Funktion J_0 sind. Da wir uns hier aber zunächst auf die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Potentialfunktion für große z beschränken wollen, können wir alle Glieder bis auf das erste mit

$$a = 2,40483 \quad (7)$$

gegen dieses vernachlässigen. Der Verlauf der Potentialkurve längs der Achse nähert sich also für große z asymptotisch dem exponentiellen Abfall

$$\Phi(z) = \text{const} \cdot e^{-2az/b} = \text{const} \cdot e^{-4,8097z/b}. \quad (8)$$

Für die Feldstärke auf der Achse $F(z) = -\partial\Phi/\partial z$ gilt demnach auch

$$F(z) = C \cdot e^{-4,8097z/b}. \quad (9)$$

Diese Tatsache läßt sich in der Elektronenoptik anwenden, wenn man das Feld in elektrostatischen Rohrlinsen oder ungesättigten magnetischen Polschuhlinsen mit zylindrischer Bohrung durch eine analytische Funktion annähern will. Die Kenntnis des Feldverlaufes längs der Linsenachse ist ja in der Elektronenoptik die Voraussetzung für jede Berechnung der Abbildungseigenschaften und Fehlerkonstanten der Linse. Man hat es in diesem Fall mit rotationssymmetrischen Potentialfeldern zu tun, welche für große positive und negative z metallische Zylinderflächen von gleichem (symmetrische Linse) oder ungleichem (unsymmetrische Linse) Durchmesser als Äquipotentialflächen haben. Zwischen diesen beiden Zylinderflächen bleibt ein Spalt der Breite s frei, von dessen Mitte aus wir die z -Koordinate zählen wollen. In Abb. 1 ist der Querschnitt eines symmetrischen und eines unsymmetrischen magnetischen Polschuhs dargestellt.

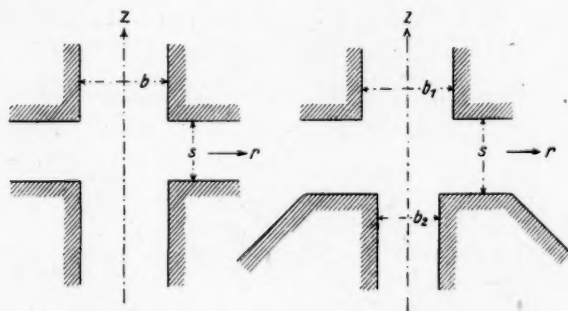


Abb. 1. Symmetrischer und unsymmetrischer Polschuhquerschnitt

Der Näherungsansatz für symmetrische Linsen

$$F(z) = K \left(1 + \Im g \frac{a}{b} \left(\frac{s}{2} - z \right) \right) \left(1 + \Im g \frac{a}{b} \left(\frac{s}{2} + z \right) \right), \quad (10)$$

welcher den asymptotischen Verlauf für große positive und negative z gemäß Gl. (9) implicite enthält und eine multiplikative Überlagerung zweier Hyperbeltangensstufen bei $\pm s/2$ darstellt, liefert mit der Normierungsbedingung, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(z) dz = I \quad (11)$$

sein soll (I sei der Potentialunterschied zwischen den beiden Zylinderflächen), mit der Abkürzung $A = \Im g \frac{as}{2b}$ die Gleichung

$$K(1+A)^2 = I A/s. \quad (12)$$

Man sieht ferner leicht aus (10), daß für den Maximalwert der Näherungskurve gilt

$$F_0 = F(0) = K(1+A)^2. \quad (13)$$

Hiermit können wir auch schreiben

$$F(z) = F_0 \frac{1 - \Im g^2 \frac{az}{b}}{1 - A^2 \Im g^2 \frac{az}{b}} \quad (14)$$

und

$$F_0 = A I/s = \frac{I}{s} \Im g \frac{as}{2b}. \quad (15)$$

Für große s/b wird $A = 1$, also $F_0 = I/s$, für kleine s/b wird aus (14)

$$F(z) = \frac{I a}{2 b \Im g^2 \frac{az}{b}}, \quad (16)$$

was einer Potentialverteilung

$$\Phi(z) = \frac{I}{2} \Im g \frac{az}{b} \quad (17)$$

entspricht, also genau der Funktion, die von F. Gray als eine „sehr gute Näherung“ für den Fall $s \ll b$ bezeichnet wird¹⁾. Allerdings rechnet Gray in diesem Fall mit $a = 2,64$.

In Abb. 2 sind nach dem Liebmannschen Maschenverfahren²⁾ [für $s/b = 0$ aus dem Integral

$$\frac{Fb}{I} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{zt}{b}}{I_0(it)} dt^3] \quad (18)$$

berechnete Feldverteilungen⁴⁾ zum Vergleich mit den entsprechenden Kurven der hier vorgeschlagenen Näherung

$$\frac{Fb}{I} = \frac{b}{s} \Im g \frac{as}{2b} \frac{1 - \Im g^2 \frac{az}{b}}{1 - \Im g^2 \frac{as}{2b} \Im g^2 \frac{az}{b}} \quad (19)$$

¹⁾ F. Gray, Bell. Syst. Techn. J., 18, 1 (1931).

²⁾ H. Liebmann, Sitzungsber. d. Bayer. Akad., 1918.

³⁾ W. W. Hansen u. D. L. Webster, Rev. Sci. instr. 7, 17 (1936).

⁴⁾ F. Lenz, Optik, im Druck.

für die Verhältnisse $s/b = 0, 1, 2$ und 5 aufgetragen. Die Übereinstimmung ist um so besser, je größer das Verhältnis s/b wird. Hiermit ist es gelungen, die Feldverteilung in guter Näherung als analytische Funktion anzugeben, welche außer der Koordinate z nur das Verhältnis s/b und die Zahl $a = 2,40483$ enthält.

Für schwache magnetische Linsen („schwach“ soll bedeuten, daß die Brennweite groß gegen die Feldlänge ist) können wir aus Gl. (14) und (15) die Brenn-

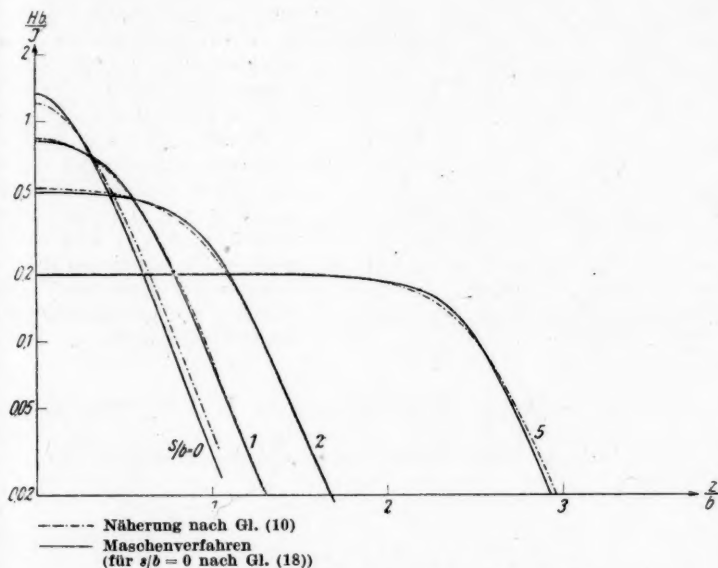


Abb. 2. Annäherung für symmetrische Polschuhe

weite, Vergrößerungsweite, Brennpunktslage und Farbfehlerkonstante nach der Brennweitenformel von Busch⁵⁾

$$\frac{1}{f} = \frac{e \mu_0^2}{8 m U^*} \int_{-\infty}^{+\infty} H^2 dz$$

berechnen. Es ergibt sich

$$\frac{f}{s}, \frac{v}{s}, \frac{z_f}{s}, \frac{C_F}{s} = \frac{8 m U^*}{e \mu_0^2 I^2} \frac{1}{\coth \frac{as}{b} - \frac{b}{as}}.$$

Hierbei bedeutet e die Elektronenladung, m die Ruhmasse des Elektrons, μ_0 die Induktionskonstante, I die Linsendurchflutung und U^* die relativistisch korri-

⁵⁾ H. Busch, Ann. Physik **81**, 974 (1926).

gierte Beschleunigungsspannung der Elektronen,

$$U^* = U \left(1 + \frac{eU}{2mc^2} \right) = U \left(1 + \frac{U}{1022000 \text{ V}} \right).$$

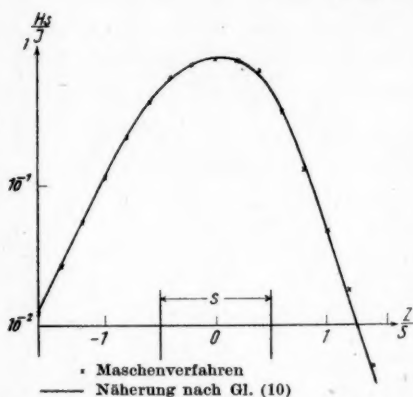


Abb. 3. Annäherung für einen unsymmetrischen Polschuh ($b_1:s:b_2 = 4:5:6$)

Wir können den Ansatz (10), welcher zunächst nur für symmetrische Linsen galt, leicht auf unsymmetrische erweitern, wenn wir in der ersten Klammer für b den Durchmesser b_1 des Zylinders für $z > s/2$, in der zweiten den Durchmesser b_2 für $z < -b/2$ einsetzen und die Konstante K wieder aus der Normierungsbedingung (11) bestimmen. Dies ist für einen Fall ($b_1:s:b_2 = 4:5:6$) durchgeführt worden. In Abb. 3 wird das Ergebnis mit der durch das Maschenverfahren mit einer Maschenweite von $h = s/5$ gewonnenen Feldverteilung verglichen.

Düsseldorf, Rheinisch-Westfälisches Institut für Übermikroskopie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 14. August 1950.)

Über die Reflektion in einem inhomogenen Medium

Von Karl Försterling und Hans-Otto Wüster

Inhaltsübersicht

Die Reflektionskoeffizienten für ein inhomogenes Medium werden für den Fall berechnet, daß sich die Dielektrizitätskonstante als Potenz einer Koordinate darstellen läßt.

In einer früheren Arbeit¹⁾ war die Lösung der Differentialgleichung

$$\varepsilon(z) u = - \frac{d^2 u}{dz^2}$$

für die zur Einfallsebene senkrechte Komponente von \mathcal{E} für den Fall gelöst worden, daß $\varepsilon(z)$ sich durch einen Potenzansatz

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 z^k$$

darstellen läßt. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die damals benutzte Methode bedeutend vereinfacht werden kann und auch einiger Änderungen bedarf.¹

Die Lösungen der Gleichung

$$\varepsilon_1 z^k u = - \frac{d^2 u}{dz^2}$$

haben die Gestalt

$$u_i = \sqrt{z} H_p^{(i)}(x) \quad i = 1, 2.$$

mit

$$p = \frac{1}{k+2} \quad \text{und} \quad x = \rho e^{i\varphi} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}}.$$

Eine Aufspaltung der Lösung in eine einfallende und eine reflektierte Welle kommt nur dadurch zustande, daß der Weg, den x durchläuft, wenn z die reelle Achse oder bei dem Vorhandensein eines konstanten imaginären Teils von k eine Parallele dazu in der unteren Halbebene durchläuft, den Verzweigungsschnitt der Hankelschen Funktionen überschreitet. Bezüglich der Lage dieser Verzweigungsschnitte herrscht in der Literatur keine Übereinstimmung. Während in älteren Arbeiten²⁾ die Verzweigungsschnitte für $H_p^{(1)}(x)$ in die negativ-imaginäre Achse und für $H_p^{(2)}(x)$ in die positiv-imaginäre Achse gelegt wurden, liegen nach Magnus-Oberhettinger³⁾ die Verzweigungsschnitte für beide Funktionsarten in der negativ-reellen Achse. Bei Überschreiten eines solchen

¹⁾ K. Försterling, Ann. Phys. 11, 1 (1931).

²⁾ Z. B. Frank-Mieses, Bd. II, (1927) S. 459.

³⁾ W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl., (1948) S. 26.

Verzweigungsschnittes sind auf die Hankelschen Funktionen ihre Umlaufsrelationen anzuwenden:

$$H_p^{(1)}(x e^{i n \pi}) = -\frac{\sin(n-1)p\pi}{\sin p\pi} H_p^{(1)}(x) - e^{-i p \pi} \frac{\sin n p \pi}{\sin p \pi} H_p^{(2)}(x) \\ H_p^{(2)}(x e^{i n \pi}) = e^{i p \pi} \frac{\sin n p \pi}{\sin p \pi} H_p^{(1)}(x) + \frac{\sin(n+1)p\pi}{\sin p \pi} H_p^{(2)}(x) \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

In einem speziellen Falle ergibt sich nun ein entscheidender Unterschied zwischen diesen beiden Möglichkeiten für die Lage der Verzweigungsschnitte.

Nehmen wir an, daß ε linear von z abhängt ($k=1$) und daß nur bei $z=-\infty$ Lichtquellen vorhanden sind. Dann wird für große positive z die gewünschte Lösung durch

$$u_D = D \sqrt{z} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$$

dargestellt, da nur $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ der Grenzbedingung bei $z = +\infty$ genügt. Läuft z von $+\infty$ nach $-\infty$, so läuft das Argument φ von 0 nach $-\frac{3\pi}{2}$. Liegt nun der

Verzweigungsschnitt für $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ in der positiv-imaginären Achse, so wird dieser nicht überschritten. Es fände dann also keine Reflektion statt. Bei der Lage des Verzweigungsschnittes in der negativ-reellen Achse wird dieser jedoch überschritten und für negative z ist $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ durch $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x e^{2\pi i})$ und $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x e^{2\pi i})$ auszudrücken. Die Umlaufsrelation lautet dann:

$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x e^{2\pi i} e^{-2\pi i}) = -e^{i\frac{\pi}{3}} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x e^{2\pi i}) - H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x e^{2\pi i}).$$

Die Amplitudenverhältnisse für die „einfallende“ Welle

$$u_E = E \sqrt{z} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x e^{2\pi i})$$

und die „reflektierte“ Welle

$$u_R = R \sqrt{z} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x e^{2\pi i})$$

sind dann:

$$E : R : D = -1 : -e^{i\frac{\pi}{3}} : 1$$

also

$$\left| \frac{R}{E} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{D}{E} \right| = 1.$$

Es tritt also eine „reflektierte“ Welle auf.

Eine Entscheidung, welche der beiden Möglichkeiten physikalisch richtig ist, läßt sich folgendermaßen erreichen:

In einer ebenen homogenen Platte aus einem Material mit negativer Dielektrizitätskonstante, die auf beiden Seiten an ein sonst unbegrenztes Vakuum stößt, kommt nur dadurch ein Energiestrom zustande, daß eine auffallende Welle sowohl beim Eintritt als auch beim Austritt an der Begrenzung der Platte reflektiert wird⁴⁾. Geht nun der Übergang von Vakuum zum zweiten Medium stetig vor sich, so muß auch dann an der Austrittsstelle eine Reflektion stattfinden. Läßt sich nun ε in der Nähe der dann vorhandenen Nullstelle durch eine lineare Funktion darstellen, so muß als Lage der Verzweigungsschnitte die gemeinsame Lage in der negativ-reellen Achse angenommen werden, da sonst keine Reflektion stattfinden

⁴⁾ K. Försterling, Elektr. Nachr. Techn. 5, 530 (1928).

würde. (Die Lage des Verzweigungsschnittes von $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$ an der gleichen Stelle läßt sich nach Umkehr der Zeitachse auf gleiche Weise herleiten.)

Mit der so bestimmten Lage der Verzweigungsschnitte lassen sich nun durch Anwendung der Umlaufsrelationen die Ausbreitungsverhältnisse für ganzzahlige k leicht bestimmen. Wir nehmen an, daß der Weg, den x in der komplexen Zahlenebene durchläuft, wie oben festgelegt ist:

$$\begin{array}{ccc} z: & +\infty & 0 & -\infty \\ \varphi: & 0 & -\frac{k+2}{4}\pi & -\frac{k+2}{2}\pi. \end{array}$$

Wir haben nun die Fälle mit geradem und ungeradem k zu unterscheiden:

I. $k = 2n + 1$.

Nehmen wir an, daß nur bei $z = +\infty$ Lichtquellen vorhanden sind, so muß u für große negative z verschwinden.

Die Lösungen unserer Gleichung sind

$$u_i = \sqrt{z} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(i)} \left(\frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{z} z^{\frac{2n+3}{2}} \right) \quad i = 1, 2.$$

Für $z = -\infty$ wird $x = \varrho e^{i\varphi} = \varrho e^{-i\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi}$. Um in dem Bereich $|\varphi| < \pi$ zu bleiben, haben wir für negative z im Argument von $H_{\frac{1}{2n+3}}^{(i)} x$ durch $x^* = x e^{i(n+2)\pi}$

zu ersetzen. Für $z = -\infty$ ist dann $x^* = \varrho e^{\frac{i\pi}{2}} = i\varrho$. Unsere Grenzbedingung bei $z = -\infty$ erfüllt dann $H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x^*) \sim e^{-\varrho}$. Unsere Lösung hat also zu lauten:

$$u_D = D \sqrt{z} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x^*).$$

Für positive z ist nun $H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x^*)$ durch $H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x)$ und $H_{\frac{1}{2n+3}}^{(2)}(x)$ auszudrücken, was mit Hilfe der Umlaufsrelationen geschieht:

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x e^{i(n+2)\pi}) &= -\frac{\sin \frac{n+1}{2n+3}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n+3}} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x) - e^{-i\frac{\pi}{2n+3}} \frac{\sin \frac{n+2}{2n+3}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n+3}} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(2)}(x) \\ &= -\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x) - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2n+3}}}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Setzen wir für die einfallende Welle

$$u_E = E \sqrt{z} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(1)}(x)$$

und für die reflektierte Welle

$$u_R = R \sqrt{z} H_{\frac{1}{2n+3}}^{(2)}(x),$$

so ist das Verhältnis der Amplituden:

$$E:R:D = -\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} : -\frac{e^{-i \frac{\pi}{2n+3}}}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} : 1$$

$$\left| \frac{R}{E} \right| = 1 \quad \left| \frac{D}{E} \right| = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2(2n+3)} \right|.$$

Für $n = 0$, also $k = 1$, wird auch $\left| \frac{D}{E} \right| = 1$, ein schon länger bekanntes Ergebnis⁵⁾.

Der dem Austritt aus einem Medium mit negativer Dielektrizitätskonstante entsprechende Fall der Ausbreitung von $z = -\infty$ nach $z = +\infty$ wird entsprechend behandelt: Bei $z = +\infty$ darf dann nur eine von $z = 0$ kommende Welle vorhanden sein; da eine solche Welle durch $H_{-1}^{(2)}(x)$ dargestellt wird, hat unsere Lösung zu lauten:

$$u_D = D \sqrt{z} H_{-1}^{(2)}(x).$$

Für negative z ist dann $H_{-1}^{(2)}(x)$ durch $H_{-1}^{(1)}(x^*)$ und $H_{-1}^{(2)}(x^*)$ auszudrücken.

$$H_{-1}^{(2)}(x) = H_{-1}^{(2)}(x^* e^{-i(n+2)\pi}) = -e^{i \frac{\pi}{2n+3}} \frac{\sin \frac{n+2}{2n+3} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n+3}} H_{-1}^{(1)}(x^*)$$

$$- \frac{\sin \frac{n+1}{2n+3} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n+3}} H_{-1}^{(2)}(x^*)$$

$$H_{-1}^{(2)}(x) = -\frac{e^{i \frac{\pi}{2n+3}}}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} H_{-1}^{(1)}(x^*) - \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} H_{-1}^{(2)}(x^*).$$

Für das Amplitudenverhältnis von $u_E = E \sqrt{z} H_{-1}^{(2)}(x^*)$ und $u_R = R \sqrt{z} H_{-1}^{(1)}(x^*)$ erhalten wir:

$$E:R:D = -\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} : -\frac{e^{i \frac{\pi}{2n+3}}}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+3)}} : 1$$

$$\left| \frac{R}{E} \right| = 1 \quad \left| \frac{D}{E} \right| = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2(2n+3)} \right|.$$

II. $k = 2n$.

Auch hier wollen wir annehmen, daß die Lichtausbreitung von $z = +\infty$ her erfolgt, wegen der Ganzzahligkeit von k tritt dabei kein Unterschied gegenüber der Ausbreitung von $z = -\infty$ her auf.

⁵⁾ R. Gans, Ann. Physik 47, 709 (1915).

Lösungen der Differentialgleichung sind hier

$$u_i = \sqrt{z} H_{2n+2}^{(i)} \left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{n+1} z^{n+1} \right) \quad i = 1, 2.$$

Für $z = -\infty$ wird $x = \varrho e^{i\varphi} = \varrho e^{-i(n+1)\pi}$. Um im Definitionsbereich der $H_{2n+2}^{(i)}(x)$ zu bleiben, ist hier x durch $x^* = x e^{i(n+1)\pi}$ zu ersetzen. $H_{2n+2}^{(1)}(x^*)$ verhält sich dann wie $e^{i\varphi}$ und $H_{2n+2}^{(2)}(x^*)$ wie $e^{-i\varphi}$. $H_{2n+2}^{(1)}(x^*)$ stellt also eine nach $z = 0$ und $H_{2n+2}^{(2)}(x^*)$ eine nach $z = -\infty$ laufende Welle dar. Unsere Grenzbedingungen werden also durch die Lösung

$$u_D = D \sqrt{z} H_{2n+2}^{(2)}(x^*)$$

erfüllt. Beim Übergang zu positiven z ist auch hier die Umlaufsrelation anzuwenden

$$\begin{aligned} H_{2n+2}^{(2)}(x^*) &= e^{i\frac{\pi}{2n+2}} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n+2}} H_{2n+2}^{(1)}(x) + \frac{\sin \frac{n+2}{2n+2}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n+2}} H_{2n+2}^{(2)}(x) \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2n+2}} H_{2n+2}^{(1)}(x) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n+2} H_{2n+2}^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Die Amplitudenverhältnisse für die einfallende Welle $u_E = E \sqrt{z} H_{2n+2}^{(1)}(x)$ und die reflektierte Welle $u_R = R \sqrt{z} H_{2n+2}^{(2)}(x)$ sind hier:

$$E : R : D = \frac{e^{i\frac{\pi}{2n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2n+2}} : \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n+2} : 1$$

$$\left| \frac{R}{E} \right| = \left| \cos \frac{\pi}{2n+2} \right| \quad \left| \frac{D}{E} \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2n+2} \right|.$$

Für $n = 1$, also $k = 2$, erhalten wir das schon bekannte Ergebnis

$$\left| \frac{R}{E} \right| = \left| \frac{D}{E} \right| = \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Der Fall $\varepsilon = \varepsilon_1 z^{2n} + a$, der der Ausbreitung einer Welle in der Nähe der Grenzfrequenz in der Ionosphäre entspricht, ist im hiesigen Institut für kleine a ebenfalls behandelt worden und wird in Kürze veröffentlicht werden.

^{*)} K. Försterling, l. c.

Über die Wärmeleitung von Gasgemischen^{*)}

Von Herbert Bock

(Mit 5 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Aus Modellbetrachtungen wird gefolgert, daß für die Wärmeleitung

1. ein Ansatz nach dem harmonischen Mittel zu bilden und
2. eine wirksame Konzentration c'_i (c_i , \dot{c}_i : Molkonz. Partialdruck, M_i : Molekulargewicht)

$$c'_i = \frac{\dot{c}_i / \sqrt{M_i}}{\sum_i \dot{c}_i / \sqrt{M_i}}$$

der Berechnung zugrunde zu legen ist.

Es ergibt sich eine zutreffende Erweiterung des gaskinetischen Analogons zum Wiedemann-Franz'schen Gesetz auf Gasgemische, bei denen

$$c'_i = c_i, \text{ also } \dot{c}_i \neq c_i: \lambda_{(e)} = K_{(e)} \cdot c_{v(e)} \cdot \eta_{(e)}$$

mit additivem Mittelwert der Euckenschen Konstanten $K_{(e)}$ und spezifischen Wärme $c_{v(e)}$, sowie eine Mischungsregel für die Wärmeleitzahl $\lambda_{(e)}$, die für binäre Gemische nur eine Konstante enthält, allgemein:

$$\frac{1}{\lambda_{(e)}} = \sum_i \frac{c_i'^2}{\lambda_i} + \sum_i \sum_k \frac{c'_i c'_k}{\lambda_{ik}},$$

wobei sich noch zeigen läßt, daß die Konstanten λ_{ik} näherungsweise auf Potentialkonstante p_i der reinen Gase zurückgeführt werden können: $\lambda_{ik} = p_i \cdot p_k \cdot \sqrt{\lambda_i \lambda_k}$.

Einleitung

Die Wärmeleitzahl von Gasgemischen läßt sich nicht ohne weiteres aus den Wärmeleitzahlen der reinen Gase interpolieren, sie ist vielmehr eine komplizierte Funktion dieser Wärmeleitzahlen, der Konzentrationen und verschiedener individueller Eigenschaften der Gasmoleküle. Wenn man die Konzentration der Komponenten — es seien zunächst binäre Gemische vorausgesetzt — normiert:

$$c_1 + c_2 = 1, \quad (1)$$

dann sind die üblichen Konzentrationsangaben: Partialdruck, Volumenkonzentration oder Molekelzahl identisch. Über dieser Konzentration graphisch aufgetragener geben die gemessenen Wärmeleitzahlen von Gasgemischen selten Gerade zwischen den Grenzwerten der reinen Gase, sondern meist nach unten konvexe Kurven, bisweilen aber auch nach oben konvexe Kurven, die sogar, wenn sich die Wärmeleitzahlen der reinen Gase nicht allzusehr unterscheiden, über diese an-

^{*)} Dissertation Rostock.

steigen und ein absolutes Maximum durchlaufen. Außerdem wurden bei einigen Gemischen mit Ammoniak Kurven mit Wendepunkt festgestellt.

Neben dem theoretisch-wissenschaftlichen Interesse gibt es auch technische Anwendungen, z. B. die Bestimmung des CO_2 -Gehaltes in Rauchgasen durch Messung der Wärmeleitzahl. Trotz der experimentellen Schwierigkeiten, mit denen eine zuverlässige Messung von Wärmeleitzahlen verbunden ist, liegen daher in der einschlägigen Literatur eine ganze Anzahl von Meßreihen vor, die eine kritische Überprüfung der vorhandenen Formeln gestatten.

Die Aufstellung der Formeln ist natürlich eine Aufgabe der kinetischen Gastheorie. Für ein Gemisch kugelsymmetrischer Gasmoleküle wurden die Berechnungen mit der größten, bisher erreichten Exaktheit von Chapman¹⁾ durchgeführt. Derartige Untersuchungen laufen beim heutigen Stand unserer Kenntnis auf den Versuch hinaus, molekulare Größen aus makroskopischen Messungen zu berechnen. Abgesehen von den ungeheuren mathematischen Schwierigkeiten einer derartigen Aufgabenstellung, die vor allem in der Unhandlichkeit der gewonnenen Ergebnisse zum Ausdruck kommen, erscheint es von Anfang an fraglich, ob die Aufgaben in dieser Form lösbar sind. Die benutzten Parameter, deren Anzahl sehr begrenzt ist, zeigen eine ganz charakteristische Mehrdeutigkeit, so daß man ein Ergebnis, das etwa auf Grund von „Anziehungskräften“ abgeleitet wurde, ebenso gut durch elastische Abstoßungskräfte oder andere Eigenschaften des Moleküls begründen kann.

Demgegenüber erfordert die Aufgabe, eine praktisch brauchbare Mischungsregel für die Wärmeleitzahl von Gasgemischen aufzustellen, nur die üblichen Näherungslösungen der kinetischen Gastheorie, die im Folgenden als bekannt vorausgesetzt werden. In Analogie zu der Formel für die Zähigkeit von Gasgemischen nach Sutherland²⁾ wurden für die Wärmeleitzahl von Wassiljew³⁾ und Grüß und Schmick⁴⁾ Formeln abgeleitet. Dabei wurde das bekannte gaskinetische Analogon zum Wiedemann-Franz'schen Gesetz

$$\lambda = K \cdot c_v \cdot \eta \quad (2)$$

zur Ableitung benutzt. Die fundamentale Beziehung sei im Folgenden als „Eucken'sche Formel“ bezeichnet, da die Deutung der Konstanten K als Parameter der Molekülstruktur von Eucken⁵⁾ gegeben wurde.

Im Folgenden wird zunächst die Anwendbarkeit der Euckenschen Formel auf Gasgemische diskutiert und danach aus allgemeinen Betrachtungen der Transportvorgänge der günstigste Ansatz für die Mischungsregel gebildet. Der mathematische Formalismus ist der übliche und braucht daher nur angedeutet zu werden, während entscheidendes Gewicht auf Modellvorstellungen gelegt wird, die den physikalischen Inhalt der Voraussetzungen und Annahmen erläutern.

Erweiterung der Euckenschen Formel zur Anwendung auf Gasgemische

In Tabelle 1 sind aus der einschlägigen Literatur 8 Gemischreihen zusammengestellt, von denen Wärmeleitzahl und Zähigkeit gemessen sind. Die Werte sind auf runde Konzentrationen und gleiche Temperatur umgerechnet, soweit das er-

¹⁾ S. Chapman, Philos. Trans. Roy. Soc. London (A) **211**, 433 (1912).

²⁾ W. Sutherland, Philos. Mag. **36**, 2, 507 (1893); **38**, 2, 1 (1894); **40**, 2, 421 (1895).

³⁾ A. Wassiljew, Physik. Z. **5**, 737 (1904).

⁴⁾ H. Grüß u. H. Schmick, Wiss. Veröff. Siemens-Konz. VII, 212 (1929).

⁵⁾ A. Eucken, Physik. Z. **16**, 324 (1913).

Tabelle 1

Stoff (m_2/m_1)	Lit.	Wert	Konzentration der erstgenannten Komponente					(Konzentration ϵ_i)					
			0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	(0,023)	(0,084)	(0,18)	(0,33)
H_2/CO_2 (21,9)	16 8, 11	η λ	137,2 35,0	137,9 49,8	138,6 88,3	138,1 138,1	132,8 210,2	132,9 315,8	84,0 417,7	38,4	47,4	64,5	(0,33) 96,5 185,4
H_2/Ar (19,8)	9, 10 8	η λ	209,6 39	208,4 56	202,4 101	190,4 154	170,5 224	126,8 317	83,9 404	(0,024) 43	(0,068) 54	(0,18) 75	(0,34) 113 213 (0,67)
H_2/O_2 (15,9)	2, 18 8, 17	η λ	192,6 58,9	191,2 72,7	185,0 117,2	174,1 171,8	153,9 237,6	115,8 324,9	83,9 395,3	(0,027) 61,7	(0,097) 73,2	(0,20) 96,6	(0,37) 140,8 234,4 (0,69)
H_2/N_2 (13,9)	12 8, 11	η λ	167,1 55,8	165,5 73,9	161,2 114,2	153,7 162,4	137,4 243	113,0 345	84,1 417,6	(0,029) 60	(0,10) 75	(0,21) 96	(0,39) 133 247 (0,71)
He/Ar (10,0)	9, 14, 15 8, 13	η λ	210,6 38,97	213,0 50,98	216,3 78,78	219,1 119,7	218,4 178,3	202,2 263,1	188,9 340,8	(0,034) 42,1	(0,12) 53,6	(0,24) 70,0	(0,43) 102,5 194,0 (0,74)
$NH_3/Luft$ (1,7)	7 6	η λ	78,7 60,3	17,1 62,2	159,7 62,9	147,3 61,5	128,9 59,1	108,6 55,9	97,5 54,4	(0,078) 61,2	(0,25) 63,1	(0,43) 62,1	(0,64) 60,1 56,2 (0,87)
H_2/N_2O (21,9)	16 8	η λ	(0,0) 38	(0,124) 55,5	(0,240) 77	(0,399) 136,6	(0,440) 123	(0,596) 173	(0,687) 206	(0,786) 125,8	(0,911) 112,5	(1,0) 84,0	
H_2/CO (13,9)	19 8	η λ	(0,0) 53	(0,060) 62	(0,157) 80	(0,193) 163,0	(0,207) 90	(0,379) 126	(0,410) 157,1	(0,492) 153,6	(0,696) 138,0	(0,0) 83,4	

⁹⁾ G. Größ u. H. Schmick, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern VII, 212 (1929).

⁷⁾ G. Jung u. H. Schmick, Z. Physik. Chem. (B) **7**, 130 (1930).

⁸⁾ D'Ans-Lax, Taschenbuch f. Physik u. Chemie S. 1136.

¹⁰⁾ M. Trautz u. H. E. Binkele, Ann. Physik (5) **5**, 561 (1930).

⁹⁾ M. Trautz u. W. Ludewigs, Ann. Physik (5) **8**, 409 (1929).

¹¹⁾ S. Weber, Ann. Physik (IV) **54**, 492 (1917).

¹²⁾ F. Kleint, Diss. Halle 1904 u. Verh. dtsh. physik. Ges. **7**, 146 (1905).

¹³⁾ J. Wachsmuth, Physik. Z. **9**, 238 (1908).

¹⁴⁾ P. Tänzler, Diss. Halle 1906 u. Verh. dtsh. physik. Ges. **8**, 222 (1906).

¹⁵⁾ M. Trautz u. Kipphan, Ann. Physik (V) **2**, 743 (1929).

¹⁶⁾ M. Trautz u. K. G. Sorg, Ann. Physik (V) **10**, 81 (1931).

¹⁷⁾ A. Wassiljew, Physik. Z. **5**, 737 (1904).

¹⁸⁾ M. Trautz u. A. Meister, Ann. Physik (V) **7**, 409 (1930).

¹⁹⁾ M. Trautz u. Baumann, Ann. Physik (V) **2**, 733 (1919).

forderlich war. Die Bezugstemperatur ist im allgemeinen 0°C ; lediglich die Gemischreihe NH_3/Luft bezieht sich auf $15,5^\circ\text{C}$. Die letzten beiden Reihen sind nicht auf runde Konzentrationen umgerechnet, da nur je 4 Werte der Zähigkeit gemessen sind. Soweit mehrere Meßreihen veröffentlicht sind, wurde das arithmetische Mittel genommen, zur Umrechnung der Temperaturen und Konzentrationen wurde linear interpoliert. Die Größe der dadurch möglicherweise unterlaufenen Fehler wird auf höchstens 5% geschätzt, während die Unsicherheit der ursprünglichen Meßwerte 1...2% betragen dürfte. Im rechten Teil der Tabelle sind die Wärmeleitzahlen noch für andere Konzentrationen — deren Größe ist in Klammern angegeben — interpoliert, da diese Zahlen später noch benötigt werden.

Es bedeuten λ die Wärmeleitzahl in $\text{cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ \times 10^6$, η die Zähigkeit in μP , m das Molekulargewicht ($0 = 16$) und c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen in $\text{cal/g} \cdot ^\circ$. Der Index 1 bezeichne immer das Gas mit kleinerem Molekulargewicht, der Index 2 das schwerere Gas und der Index c das Gemisch mit den Konzentrationen c_1 und c_2 , wobei als Maßzahl die Konzentration c_1 benutzt werden soll.

Die Anwendung der Euckenschen Formel auf Gasgemische erfordert zunächst die Berechnung der spezifischen Wärme für das Gemisch. Da der Wärmeinhalt sich sehr weitgehend additiv verhält, ergibt sich die plausible Mischungsregel:

$$c_{v(c)} = \frac{c_{v1} c_1 m_1 + c_{v2} c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \quad (3)$$

Die Strukturkonstante K der Euckenschen Formel kann beim Fehlen von Anhaltspunkten für ein abweichendes Verhalten additiv gemittelt erwartet werden:

$$K'_{(c)} = K_1 c_1 + K_2 c_2 \quad (4)$$

Der Ansatz hat keine grundsätzliche Bedeutung, da man sich zunächst auf die Gemische mit $K_1 = K_2$ beschränken könnte. Beim Einsetzen der Werte aus Tabelle 1 und der spezifischen Wärme nach (3) ergibt sich ein Wert $K_{\text{beob}(c)}$, der die Euckensche Formel erfüllt.

$$\lambda_{(c)} = K_{\text{beob}(c)} \cdot c_{v(c)} \cdot \eta_{(c)} \quad (5)$$

Diese Werte von $K_{\text{beob}(c)}$ sind für die Gemische der Tabelle 1 in Tabelle 2 zusammengestellt. Man erkennt daß $K_{\text{beob}(c)}$ konzentrationsabhängig ist, auch in den Fällen $K_1 = K_2$, und ein Maximum in der Nähe von $c_1 = c_2 = 0,5$ durchläuft. Die relative Vergrößerung der Konstanten:

$$D_{(c)} = \frac{K_{\text{beob}(c)} - K'_{(c)}}{K'_{(c)}} \cdot 100 \quad (6)$$

Tabelle 2

Gaskomponenten (m_2/m_1)	K bei der Konz. der erst. Komp. c_1							$D_{(0,5)}\%$
	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	
H_2/CO_2 (21,9)	1,68	2,21	3,25	3,98	4,31	3,46	2,06	+113
H_2/Ar (19,8)	2,49	3,06	4,02	4,32	4,08	3,10	1,99	+ 93
H_2/O_2 (15,9)	1,96	2,21	2,94	3,41	3,47	2,89	1,95	+ 75
H_2/N_2 (13,9)	1,85	2,17	2,74	3,26	3,06	2,68	2,07	+ 66
He/Ar (10,0)	2,48	3,12	3,84	4,31	4,32	3,54	2,43	+ 75
NH_3/Luft (1,7)	1,97	1,94	1,85	1,68	1,57	1,48	1,47	— 2
		(0,40)	(0,59)	(0,79)	(0,91)			
$\text{N}_2/\text{N}_2\text{O}$ (21,9)	1,75	3,68	4,42	4,32	3,42		2,07	+113
		(0,19)	(0,41)	(0,49)	(0,69)			
H_2/CO (15,9)	1,80	2,48	2,96	3,19	3,60		2,03	+ 68

ist in der letzten Spalte der Tabelle 2 für $c = 0,5$ eingetragen. Offensichtlich ist $D_{(0,5)}$ vom Quotienten der Molekulargewichte m_2/m_1 abhängig und steigt mit diesem bei zu 113% für einen Quotienten von 21,9. Die Quotienten stehen in der ersten Spalte hinter den chemischen Zeichen der gemischten Gase.

Das Auftreten positiver $D_{(c)}$ steht in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Chapmanschen Arbeit (l. c.), wo es jedoch als „interessant aber infolge Fehlens einer theoretischen Erklärung für Folgerungen unfruchtbar“ abgetan wird und deshalb wohl auch nicht die nötige Beachtung gefunden hat. Nun hat

aber durch die Euckensche Deutung die Konstante K einen physikalischen Sinn bekommen, und ihre Abhängigkeit von den verschiedenen Freiheitsgraden des Moleküls wird durch die Transportvorgänge in Gasgemischen in keiner Weise beeinflusst. Es erscheint daher zweckmäßiger, die Konstante unverändert festzuhalten, für Gemische verschiedenartiger Moleküle etwa nach Formel (4), und die Anwendung der Formel (5) in geeigneter Weise zu modifizieren, statt des Versuches, $K_{\text{beob}(c)}$ als Funktion der Konzentration darzustellen. Vor allem liefert die Abhängigkeit von $D_{(0,5)}$ vom Verhältnis der Molekulargewichte einen deutlichen Hinweis darauf, daß es sich hier um einen Effekt des Transportmechanismus in Gemischen handelt. Die übliche analoge Behandlung

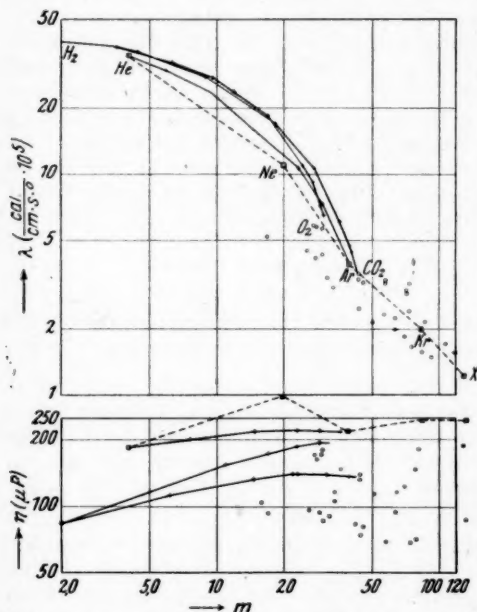


Abb. 1. Wärmeleitzahl und Zähigkeit von Gasen bei 0° C in Abhängigkeit vom Molekulargewicht. □ Edelgase, ○ Sonstige reine Gase, + Gasgemische

des Impuls- und Energietransportes in Gasen verschleiert die wesentlichen Unterschiede beider Mechanismen, sie seien daher zunächst aufgezeigt.

1. Die Massenabhängigkeit von Wärmeleitung und Zähigkeit unterscheidet sich um den Faktor m . In Abb. 1 ist über dem Logarithmus des Molekulargewichtes aufgetragen der Logarithmus der Wärmeleitzahl (oben) und der Zähigkeit (unten) des betreffenden Gases. Die Streuung der Werte im Verhältnis etwa 1:2 um eine mittlere Kurve ist auf den Einfluß der Molekülstruktur (eiatomige, zweiatomige usw.) und der individuellen Wirkungsquerschnitte, von der Waalschen Kräfte usw. zurückzuführen und verhindert eine quantitativ brauchbare Darstellung als Funktion des Molekulargewichtes. Trotzdem zeigt das Diagramm, daß die Wärmeleitzahl dem Molekulargewicht annähernd umgekehrt proportional

ist, während die Zähigkeit davon praktisch unabhängig ist (vgl. die gestrichelte Verbindungslinie der Edelgaswerte).

Außer den Werten der reinen Gase sind auch, durch kleine Kreuze gekennzeichnet und mit Geraden verbunden, die experimentellen Werte von 3 Gemischreihen in das Diagramm aufgenommen. Das Molekulargewicht des Gemisches wurde dafür in üblicher Weise nach

$$m(c) = m_1 c_1 + m_2 c_2 \quad (7)$$

berechnet. Während sich die Zähigkeiten der Gemische dem allgemeinen Bild einfügen, zeigt das Diagramm der Wärmeleitzahlen einen auffallend abweichenden Charakter. Entsprechend der schon oben aufgezeigten Alternative kann man sagen, daß entweder die Wärmeleitzahlen oder die Molekulargewichte nach (7) zu groß erscheinen. Der hier eingeschlagene Weg führt auf eine Modifikation der Molekulargewichte durch Einführung einer „wirksamen“ Konzentration. Jedenfalls zeigt das Diagramm, daß die Wärmeleitung für die Schwierigkeiten bei der Anwendung der Euckenschen Formel verantwortlich ist, während die Zähigkeit von Gasgemischen einen normalen Verlauf zeigt und sich ja auch durch die Sutherlandische Mischungsregel befriedigend darstellen läßt.

2. Das Temperaturfeld ist rotationssymmetrisch um die Richtung des Temperaturgradienten als Achse. Das Strömungsfeld hat dagegen nur eine Symmetrieebene durch die Richtungen des Geschwindigkeitsgradienten und der Strömungsgeschwindigkeit, die aufeinander senkrecht stehen. Die Analogie beider Erscheinungen beruht daher in reinen Gasen gewissermaßen auf einer Pseudosymmetrie, die in Gasgemischen durch das Auftreten verschiedenartiger Moleküle aufgehoben ist.

3. Die Flächen gleicher Temperatur sind durch statistische Schwankungen uneben, die Temperatur enthält die schwankende Größe v (Molekülgeschwindigkeit) in der zweiten Potenz, ist daher erst als Mittelwert der Energien vieler Moleküle sinnvoll definiert; ein Einzelmolekül hat noch keine Temperatur — vor allem auch im Hinblick auf das verschiedenartige Verhalten der diversen Freiheitsgrade — sondern nur eine kinetische Energie. Dagegen enthält der Impuls die schwankende Größe v nur in der ersten Potenz, der Impuls ist für das Einzelmolekül ebenso definiert, wie die Impulssumme für den Gesamttransport, die Einzelimpulse schwanken weit weniger als die kinetischen Energien. Daraus folgt, daß die Strömungsflächen von höherer Ordnung glatt sind, als die Flächen gleicher Temperatur, zumal sich die Flächen gleicher Strömungsgeschwindigkeit durch die Relativbewegung gewissermaßen glatt schleifen.

4. Der Transport des Einzelmoleküls ist für Energie am größten, wenn $v // \text{grad } T$. Der Transport von Impuls ist in diesem Falle gleich Null, Impuls wird nur durch schräge Bahnen übertragen, der größte Impulstransport geschieht auf Bahnen, bei denen die Richtung der Molekülgeschwindigkeit den rechten Winkel zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Geschwindigkeitsgradient halbiert.

Ausgehend von dem letztgenannten Unterschied seien nun einfache Modelle betrachtet, um den Unterschied im Transportmechanismus zu einer quantitativen Aussage über das Verhalten der Gemische verwerten zu können. Das einfachste Gemisch enthält je ein Molekül der Sorten 1 und 2. Es sei angenommen $m_1 = 1$ und $m_2 = 4$, es gilt $c_1 = c_2 = 0,5$. Die einfachste Bewegung der Moleküle ist eine periodische, wodurch der Transportvorgang stationär in allen Einzelheiten ist; die Modellmoleküle sollen sich also auf einer räumlich festliegenden Bahn hin

und her bewegen, wie es z. B. im festen Körper tatsächlich der Fall ist. Im Gas ist ein solches Modell nun nicht mit den widerstreitenden Forderungen in Einklang zu bringen: Die Stoßgesetze für den zentralen Stoß fordern für eine Bewegung mit ruhendem Schwerpunkt des Systems Gleichheit der Impulse, dagegen fordert das Äquipartitionstheorem Gleichheit der kinetischen Energien: $v_1/v_2 = 2$. Da die letzte Forderung ganz fundamental und kennzeichnend für die kinetische Gastheorie ist, soll für die hier benutzten Modellmoleküle das Verhältnis der Geschwindigkeitsbeträge nach den Äquipartitionstheorem bestimmt werden; das bedeutet, daß der Impulssatz für die Transportrichtung nicht berücksichtigt wird. Das kann geschehen einmal deshalb, weil das Modell-Molekül ja nur ein Bild für viele Moleküle ist, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten treffen, während das Modell eine konstante Geschwindigkeit hat, wie es allgemein in den elementaren Ableitungen vorausgesetzt wird. Zweitens wird die Betrachtung auf ein ein- bzw. zweidimensionales Gas beschränkt, die Unstimmigkeit des Impulssatzes kann daher durch Zwangskräfte oder dergleichen beseitigt werden; im dreidimensionalen Raum gelten durch das Auftreten streifender Zusammenstöße ohnehin ganz andere Zusammenhänge.

Für die Wärmeleitung sei als charakteristische Bahn die Richtung des Temperatur-Gradienten gewählt, da sie die Bahn des größten Energietransportes ist. Abb. 2 zeigt das Modellgas, eindimensional bzw. in eine Röhre eingeschlossen. Eine rein kinematische Betrachtung zeigt nun, daß die Moleküle im Mittel Wege von der relativen Länge v_1 bzw. v_2 zurücklegen werden, dann aneinander oder an die Endflächen der Röhre stoßen und umkehren. Wenn die Temperatur am oberen Ende der Röhre höher ist, als am unteren, so bewegen sich die Modell-Moleküle nach unten etwas schneller als nach oben. Das schwere stößt also etwas eher an die untere Endfläche, als das leichte an die obere; im übrigen treffen sich die Moleküle wieder an derselben Stelle. Man kann das so auffassen, daß die Moleküle nicht gleiche Volumina erfüllen, sondern Volumina, die der mittleren Geschwindigkeit proportional sind. Man erhält die Vorstellung, daß der mittlere Zeitabschnitt zwischen zwei Zusammenstößen konstant bleibt, während die freie Weglänge von Molekülsorte zu Molekülsorte mit der mittleren Geschwindigkeit variiert. Für reine Gase kann die angenäherte Gültigkeit dieses Zusammenhanges aus den veröffentlichten Zahlenwerten²⁰⁾ nachgewiesen werden, für Gasgemische läßt er sich im Rahmen der üblichen Näherungen wie folgt formelmäßig belegen:

Bezeichnet l_i die freie Weglänge im reinen Gas und l'_i die mittlere freie Weglänge der i -Moleküle im Gemisch mit k -Molekülen, ferner C_i bzw. ${}_kC_i$ die Sutherlandschen Konstanten, für die allgemein angenommen wird ${}_kC_i = {}_iC_k$, so gilt mit den bereits eingeführten Größen und der Temperatur T die bekannte Näherungsformel:

$$\frac{l'_i}{l_i} = \frac{1}{c_i + c_k \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_i + m_k}{2 m_i} \left(1 + \frac{{}_kC_i}{T}\right)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{{}_kC_k} + \frac{1}{T}} + \sqrt{\frac{l_k}{l_i} \cdot \left(1 + \frac{{}_iC_k}{T}\right)} \right)^2} \quad (8)$$

In abgekürzter Schreibweise liefert die Formel bekanntlich den Ansatz zu den Korrekturgliedern in den hier interessierenden Mischungsregeln:

$$\frac{l'_i}{l_i} = \frac{1}{c_i + c_k A_i} \sim \frac{\lambda'_i}{\lambda_i} \sim \frac{\eta'_i}{\eta_i}, \quad (9)$$

²⁰⁾ Vgl. z. B. Cl. Schäfer, Einf. i. d. theor. Phys. Bd. II, de Gruyter & Co., Berlin u. Leipzig 1929, S. 414.

worin die Zeichen \sim bedeuten, daß die Quotienten zwar durch dieselbe Näherungsformel, aber durch verschiedene, mehr oder weniger empirische Konstante A_i dargestellt werden.

Die Formel (8) liefert die mittlere freie Weglänge der i -Moleküle im Gemisch. Diese freie Weglänge ist nun im einzelnen aus zwei Gruppen von Bahnen gemittelt, nämlich Bahnen zwischen Zusammenstößen mit gleichartigen i -Molekülen und Bahnen zwischen Zusammenstößen mit andersartigen k -Molekülen (daneben noch gemischte Bahnen). Für die hier in Frage stehende Beziehung interessieren jedoch nur die Bahnen der zweiten Gruppe. Deren freie Weglänge erhält man am einfachsten allein, indem man ein Gemisch betrachtet, das überhaupt nur noch ein Molekül der Sorte i enthält, da dieses dann natürlich nur mit k -Molekülen zusammenstoßen kann. Der erforderliche Grenzübergang zur Konzentration $c_i = 0$ bietet keine mathematische Schwierigkeit, man erhält das gesuchte Verhältnis $l'_i/l_i (c_i = 0)$ durch Einsetzen von $c_i = 0$, $c_k = 1$ in (8). Damit berechnet sich:

$$\frac{l'_i}{l_i} = \frac{l'_i/l_i (c_i = 0)}{l'_i/l_i (c_i = 0)} \cdot \frac{l_i}{l_i} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{v_1}{v_2} = Q, \quad (10)$$

wie man sich leicht durch Einsetzen und Kürzen aller komplizierten Ausdrücke überzeugt. Q ist als Abkürzung eingeführt, das Verhältnis der m_i und v_i nach dem Äquipartitionstheorem berechnet.

Das Ergebnis stimmt also mit der Modellüberlegung überein, im Gemisch (und nur i -Moleküle zwischen Zusammenstößen mit k -Molekülen sind ja wirklich in Mischung) verhalten sich die freien Weglängen wie die Geschwindigkeiten.



Abb. 2. Eindimensionales Gas-Modell für Wärmeleitung

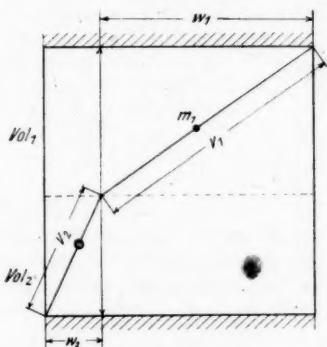


Abb. 3. Zweidimensionales Gas-Modell für Zähigkeit

$$\frac{m_2}{m_1} = 4 \quad \frac{v_1}{v_2} = 2$$

Die Anwendung der Modell-Moleküle zur Darstellung des Impulstransportes muß wegen der anderen Symmetrie der Zähigkeitserscheinungen zweidimensional sein. Wie oben sei die y -Achse die Richtung des Geschwindigkeitsgradienten, die x -Achse sei die Richtung der Wandgeschwindigkeiten w_x . Um ein ruhendes Modell zu erhalten, müssen nämlich beide Begrenzungswände bewegt werden. Für die x -Komponente gilt nach Voraussetzung der Impulssatz, es ist daher mit denselben

Molekülen wie oben $v_{x1}/v_{x2} = 4/1$, während für den Betrag der Geschwindigkeiten nach dem obigen gilt: $|v_1|/|v_2| = 2/1 = Q$. Für den Impulstransport ist die charakteristische Bahn größten Transportes unter 45° gegen die Achsen geneigt. Mit diesen Bedingungen ist Abb. 3 gezeichnet. Man erkennt aus ihr Folgendes:

1. Die erfüllten Volumina sind annähernd gleich für beide Moleküle, die die bezügliche Korrekturüberlegung des Modells für die Wärmeleitung trifft für die Zähigkeit nicht zu.

2. Die Bahn ist geknickt. Das ist ein Grund für die Vergrößerung der Konstanten $K_{\text{beob}(c)}$ im Gasgemisch, denn auf der geknickten, längeren Bahn kommt natürlich ein kleinerer Impulstransport zustande.

3. Die Bahn hat wohl nach Konstruktion die mittlere Neigung von 45° , sie ist aber für die einzelnen Moleküle nicht mehr die charakteristische Bahn größten Impulstransportes. Wenn man daher die isolierenden Grenzen der Zeichenebene wegnimmt, kommt durch den seitlichen Austausch der Moleküle eine wesentliche Transportvergrößerung zustande, indem die Moleküle nunmehr von Stoß zu Stoß wechseln und dabei der Transport auf charakteristischen Bahnen der Einzelmoleküle von Stoßebene zu Stoßebene vor sich geht.

Die Auswertung der Modelle, vor allem des letzten Punktes, wird im folgenden Abschnitt noch einen grundsätzlichen Unterschied im Ansatz der Mischungsregeln für Zähigkeit und Wärmeleitung ergeben. Hier interessiert zunächst nur, daß für die Wärmeleitung — und nur für diese — eine Modifikation des Volumens der gemischten Gase zu berücksichtigen ist. Das leichtere Gas nimmt für den Energietransport scheinbar ein größeres Volumen ein, d. h. es besitzt eine größere „wirksame Konzentration“.

Die wirksame Konzentration sei mit c'_i bezeichnet, die bisherige Konzentration = relative Molekelzahl sei demgegenüber durch einen übersetzten Punkt hervorgehoben: \dot{c}_i . Mit dem oben quantitativ festgelegten Faktor der Modifikation Q berechnen sich die beiden Konzentrationen in der zweckmäßigen Normierung:

$$c'_1 = \frac{\dot{c}_1 Q}{\dot{c}_1 Q + \dot{c}_2} \quad c'_2 = \frac{\dot{c}_2}{\dot{c}_1 Q + \dot{c}_2} \quad (11)$$

$$\dot{c}_1 = \frac{c'_1}{c'_1 + c'_2 Q} \quad \dot{c}_2 = \frac{c'_2 Q}{c'_1 + c'_2 Q} \quad (12)$$

Mit diesen Größen ist nunmehr zu schreiben $\lambda_{(c)}$ für die Wärmeleitzahl eines Gasgemisches, während die Zähigkeit weiterhin $\eta_{(c)}$ geschrieben wird, da für die Zähigkeit eben nur eine einheitliche Konzentrationsangabe maßgebend ist. Die Euckensche Formel schreibt sich nunmehr:

$$\lambda_{(c)} = K_{(c)} \cdot c_{v(c)} \cdot \eta_{(c)}. \quad (13)$$

Es hat sich gegenüber (5) nur der Punkt über dem (c) geändert; während oben jedoch naiverweise Wärmeleitzahlen und Zähigkeiten usw. in die Formel eingesetzt wurden, für die $\dot{c}_1 = c_1$ und $\dot{c}_2 = c_2$ war, muß nun natürlich die wirksame Konzentration beider Gemische gleich sein, d. h. $c'_1 = c_1$ und $c'_2 = c_2$. Es müssen also Gemische verschiedener Mol-Konzentration durch die Euckensche Formel miteinander in Beziehung gebracht werden.

Zur Überprüfung von Formel (13) wird wieder das experimentelle Material aus Tabelle 1 herangezogen. Im rechten Teil der Tabelle waren bereits die zu den $c_1 = c'_1$ zugehörigen \dot{c}_1 nach (12) berechnet und in Klammern angegeben sowie die Wärmeleitzahlen, die diesen Konzentrationen entsprechen, linear interpoliert,

eingetragen. In Tabelle 3 sind zusammengestellt: die zusammengehörigen Konzentrationen, die $K_{(c)}$ nach (13) und deren Differenzen gegenüber dem linearen Ansatz (4) nach (6).

Tabelle 3

Gemisch	Wert c_1	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
H_2/CO_2	\dot{c}_1	0,0	0,023	0,084	0,18	0,33	0,66	1,0
	K	1,68	1,71	1,75	1,86	1,98	2,03	2,06
	$-D_{(c)}$	—	± 0	+2,2	+0,5	-2,1	-0,5	—
H_2/Ar	\dot{c}_1	0,0	0,024	0,088	0,18	0,34	0,67	1,0
	K	2,40	2,35	2,15	2,10	2,06	2,08	1,99
	$-D_{(c)}$	—	+3,7	+8,1	+6,3	+3,7	-2,0	—
H_2/O_2	\dot{c}_1	0,0	0,027	0,097	0,20	0,37	0,69	1,0
	K	1,96	1,87	1,83	1,90	2,06	2,09	1,95
	$-D_{(c)}$	—	+4,1	+6,2	+2,6	-5,1	-7,2	—
H_2/N_2	\dot{c}_1	0,0	0,029	0,10	0,21	0,39	0,71	1,0
	K	1,88	1,86	1,91	2,05	1,94	2,07	2,06
	$-D_{(c)}$	—	+2,1	+1,0	-4,0	+3,5	-1,5	—
He/Ar	\dot{c}_1	0,0	0,034	0,12	0,24	0,43	0,74	1,0
	K	2,48	2,64	2,60	2,51	2,48	2,62	2,43
	$-D_{(c)}$	—	-6,9	-5,7	-2,5	-1,6	-7,8	—
$NH_3/Luft$	\dot{c}_1	0,0	0,78	0,25	0,43	0,64	0,87	1,0
	K	1,47	1,49	1,60	1,70	1,85	1,91	1,97
	$-D_{(c)}$	—	+0,5	-1,7	+1,2	+1,2	+2,0	—
H_2/N_2O	$c_1 = c_1$	0,0	0,0399	0,596	0,786	0,911		1,0
	\dot{c}_1	0,0	0,124	0,240	0,440	0,687		1,0
	K	1,75	1,81	1,97	2,03	2,08		2,07
H_2/CO	$-D_{(c)}$	—	+3,7	-1,5	-1,5	-2,0		—
	$c' = c_1$	0,0	0,193	0,410	0,492	0,695		1,0
	\dot{c}_1	0,0	0,0604	0,157	0,209	0,379		1,0
H_2/CO	K	1,80	1,78	1,79	1,82	2,06		2,03
	$-D_{(c)}$	—	+3,3	+5,3	+5,1	-5,1		—

Man erkennt sofort, daß die verbliebenen geringen Differenzen keinen systematischen Gang mit der Konzentration oder dem Massenverhältnis mehr zeigen, sondern regellos streuen. Die große Abweichung beträgt 8,1%, das Mittel der absoluten Beträge ist 3,3%. Die Differenzen sind damit nicht größer, als aus der Unsicherheit der experimentellen Werte und der linearen Interpolation zu erwarten war. Man darf daher die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges und die Gültigkeit auch der Formel (4) als experimentell bestätigt ansehen.

Daß die Formeln exakt richtig wären, darf man natürlich nicht erwarten. Wenn man jedoch bedenkt, daß die Konstante der Eucken'schen Formel für reine Gase eine Abhängigkeit von Temperatur und Druck von einigen % zeigt, dann darf man sagen, daß die Erweiterung der Formel zur Anwendung auf Gasgemische mit den verhältnismäßig einfachen Ansätzen hier im Rahmen der üblichen Näherungen gelungen ist.

Durch die gewonnene Formel ist eine bisherige Lücke geschlossen, es können nunmehr praktisch die Messungsergebnisse von Zähigkeitsuntersuchungen auf Wärmeleitzahlen umgerechnet werden und umgekehrt. Da Gaszähigkeiten wesentlich einfacher und um etwa eine halbe Größenordnung genauer gemessen werden

können, als Wärmeleitzahlen, dürfte es sich in vielen praktisch vorkommenden Fällen empfehlen, Zähigkeitsmessungen zugrunde zu legen, die auch in viel größerem Umfang bereits in der Literatur veröffentlicht sind. Leider fehlen allerdings gerade von einigen Mischungsreihen, deren Wärmeleitzahlen zuverlässig gemessen sind, die Zähigkeitsmessungen. Zur Überprüfung der Formel auf erweiterter Basis wäre die Durchführung dieser Zähigkeitsmessungen erwünscht.

Mittels der Sutherlandschen Formel können die Zähigkeiten der Gasgemische aus Konstanten der reinen Gase berechnet werden unter Benutzung der ϵ_k , die aus Diffusionsmessungen oder Zähigkeitsmessungen an mindestens einem Gemisch oder auch aus genauerer Kenntnis der Molekülkräfte gewonnen werden. Vorläufig ist also im allgemeinen theoretisch mindestens eine Messung an einem Gemisch der betreffenden Mischungsreihe erforderlich. Soweit diese durchgeführt und ϵ_k bekannt ist, kann nunmehr nicht nur die Zähigkeit aller Gemische der betreffenden Mischungsreihe, sondern daraus auch die Wärmeleitzahl aller Gemische mit annähernd derselben Genauigkeit berechnet werden, wie sie durch Messung erreichbar ist.

Natürlich läßt sich aus den Formeln auch eine Mischungsregel für die Wärmeleitzahlen in geschlossener Form aufstellen. Diese Formel wird jedoch ziemlich unhandlich und enthält außer den Wärmeleitzahlen der reinen Gase, den Molekulargewichten und Konzentrationen noch die spezifischen Wärmen und die K_i der Euckenschen Formel sowie die A_i der Sutherlandschen Mischungsregel. Es wird daher im Folgenden noch eine einfachere Interpolationsformel für die Wärmeleitzahlen entwickelt werden.

Mischungsregel für die Wärmeleitzahl von Gasgemischen

Die schon mehrfach erwähnte Mischungsregel von Sutherland für die Zähigkeit von Gasgemischen:

$$\eta(c) = \frac{c_1 \eta_1}{c_1 + c_2 A_1} + \frac{c_2 \eta_2}{c_2 + c_1 A_2} \quad (14)$$

bildet auch die Grundlage für die entsprechenden Formeln für die Wärmeleitzahl von Wassiljewa bzw. Größ und Schmick (l. c.)

$$\lambda(c) = \frac{\epsilon_1 \lambda_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2 A_1} + \frac{\epsilon_2 \lambda_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1 A_2} \quad (15)$$

Es sind also einfache additive Ansätze, die durch Korrekturfaktoren nach (9) modifiziert sind. Die formale Gleichheit der beiden Ansätze setzt implizit die Gültigkeit der Euckenschen Formel für Gemische voraus, was nach dem obigen nicht ohne Korrektur zulässig ist. Die bisherigen Bemühungen waren darauf gerichtet, die A_i in geeigneter Weise zu bestimmen, um numerische Übereinstimmung zwischen Formel und experimentellen Werten zu erzielen. Um zu zeigen, daß diese Bemühungen aussichtslos sind, sei — zunächst für den bewährten Sutherlandschen Ansatz — folgender induktiver Weg beschritten:

Es sei ein bestimmtes Gemisch, z. B. aus H_2 und CO_2 hergestellt mit den Konzentrationen $c_1 = a$, $c_2 = 1 - a$, und seine Zähigkeit gemessen. Dann gilt nach (14):

$$\eta(c) = \frac{\eta_1}{1 + \frac{1-a}{a} A_1} + \frac{\eta_2}{1 + \frac{a}{1-a} A_2} \quad (16)$$

Sind nun die η_i ebenfalls aus Messungen bekannt, so ist durch (16) jedem beliebigen Wert von A_1 ein bestimmter Wert von A_2 zugeordnet. Die Gesamtheit

dieser Wertepaare bildet bei einer Parameterdarstellung in der A_1A_2 -Ebene eine Hyperbel. Bildet man nun aus denselben zwei Gasen weitere Mischungen mit anderen Konzentrationen $c_1 = b \dots$ — die Gesamtheit dieser Mischungen ist hier Mischungsreihe genannt —, so liefert jede Mischung der Mischungsreihe mit ihrem gemessenen $\eta_{(c)}$ eine ähnliche Hyperbel in der A_1A_2 -Ebene. Die Formel ist nun dann und nur dann brauchbar, wenn sich alle Hyperbeln derselben Mischungsreihe in ein und demselben Punkt schneiden. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind dann die gesuchten Werte von A_1 und A_2 , die die Formel (14) für alle Konzentrationen erfüllen, d. h. die gemessenen Werte $\eta_{(c)}$ für alle Konzentrationen der Mischungsreihe richtig interpolieren und angeben.

Wählt man als Koordinatenmaßstab für die A_1A_2 -Ebene logarithmische Teilungen, so stellen sich die Hyperbeln als nahezu geradlinige gestreckte Kurven dar, die leichter und übersichtlicher gezeichnet werden können. In Abb. 4 ist diese Darstellung für die Mischungsreihe H_2/CO_2 ausgeführt in der Kurvenschar I.

Man erkennt sofort, daß tatsächlich ein gemeinsamer Schnittpunkt existiert, Abweichungen einzelner Kurven sind offenbar auf Streuung der experimentellen Werte zurückzuführen und geben damit gleich ein Bild von der Größe dieser Unsicherheit.

Bildet man aus den Sutherlandschen Formeln den Quotienten A_1/A_2 , so ergibt sich nach einiger Rechnung näherungsweise die einfache Beziehung:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Diese Formel wird in Abb. 4 durch die Gerade g_1 dargestellt, die ersichtlich die Kurvenschar I annähernd im gemeinsamen Schnittpunkt ebenfalls schneidet, der Ansatz ist also auch in dieser Beziehung richtig.

In gleicher Weise, wie für die Zähigkeit ausgeführt, ist in Abb. 4 mit der Kurvenschar II auch die entsprechende Formel (15) für die Wärmeleitzahlen dargestellt. Der Vergleich ergibt Folgendes:

1. Die beiden Kurvenscharen schneiden sich nicht in einem gemeinsamen Punkt, d. h. die A_i haben für Zähigkeit und Wärmeleitung verschiedene Größe, wie zu erwarten.

2. Die Kurvenschar II hat überhaupt keinen Schnittpunkt, es ist lediglich eine Konvergenz für kleine Werte von A_2 angedeutet, d. h. die Hyperbeln haben näherungsweise eine gemeinsame Asymptote.

3. Der Konvergenzbereich der Kurvenschar liefert keine physikalisch sinnvolle Formel. Bildet man nämlich analog zu (17) den Quotienten aus den Ansätzen von Grüß und Schmick, in den zugänglichsten Werten näherungsweise:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{c_{v2}}{c_{v1}}, \quad (18)$$

so schneidet diese Gerade g_2 die Schar II weit außerhalb des Konvergenzbereiches. Die eingetragenen Punkte nach Grüß und Schmick (auf g_2) und nach Wassiljewa (in der Nähe von g_1) liegen weit außerhalb der Kurvenschar, ihre Verschiebung in die Kurvenschar führt zu abnormen Werten von ${}_1C_2$.

Es bleibt noch zu bemerken, daß die Streuung der Kurven, vor allem bei den äußeren Grenzkurven bemerkbar, für die Wärmeleitzahl wesentlich größer ist, als für die Zähigkeit, entsprechend den Schwierigkeiten der Messungen. Andere Mischungsreihen liefern ganz analoge Darstellungen, die um so charakteristischer ausfallen, je größer m_2/m_1 ist.

Durch Abb. 4 ist gezeigt, daß (15) grundsätzlich nicht richtig ist. Nachdem oben bereits die Unterschiede im Transportmechanismus für Impuls und Energie aufgezeigt waren, soll nun erläutert werden, welche Ansätze für eine solche Mischungsregel überhaupt in Frage kommen.

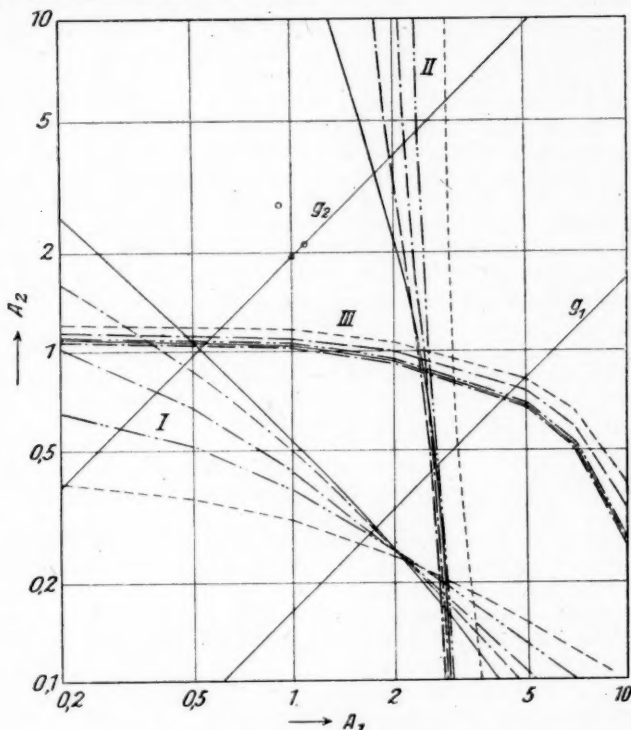


Abb. 4. Zähigkeit und Wärmeleitzahl von Gemischen aus H_2/CO_2 in Parameter-Darstellung

$$\begin{array}{ll}
 \text{I)} \quad \eta_{(c)} = \frac{c_1 \eta_1}{c_1 + c_2 A_1} + \frac{c_2 \eta_2}{c_2 + c_1 A_2} & c_1 = 0,1 \text{ ———} \\
 \text{II)} \quad \lambda_{(c)} = \frac{c_1 \lambda_1}{c_1 + c_2 A_1} + \frac{c_2 \lambda_2}{c_2 + c_1 A_2} & c_1 = 0,3 \text{ - - -} \\
 \text{III)} \quad \frac{1}{\lambda_{(c)}} = \frac{c_1'(c_1' + c_2' A_1)}{c_1} + \frac{c_2'(c_2' + c_1' A_2)}{c_2} & c_1 = 0,5 \text{ . . .} \\
 & c_1 = 0,7 \text{ ———} \\
 & c_1 = 0,9 \text{ - - -}
 \end{array}$$

Transportphänomene allgemeiner Art werden beschrieben durch eine Potentialdifferenz, eine Stromstärke und den Quotienten dieser beiden Größen, der physikalisch die Bedeutung eines Widerstandes (R) oder eines Leitwertes (L) hat. Die Beziehung ist als Ohmsches Gesetz am bekanntesten und wird von der Elektrizitätslehre auf die anderen Gebiete übertragen. Die reziproken Begriffe R und L sind physikalisch völlig gleichberechtigt, die Bevorzugung des einen oder anderen

hat lediglich praktische Gründe. Die Formeln für ein Zusammenwirken zweier Widerstände nehmen nämlich für die Serienschaltung (_s) und Parallelschaltung (_p) jeweils bei der einen Ausdrucksweise die einfache Form der Summe an:

$$\begin{aligned} R_s &= R_1 + R_2 & L_s &= \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \\ R_p &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} & L_p &= L_1 + L_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Die beiden Ausdruckweisen geben also für denselben Tatbestand die Formeln des arithmetischen und harmonischen Mittels nebeneinander; um die handlichere Formel des arithmetischen Mittels benutzen zu können, wird beim Überwiegen von Serienschaltungen der Widerstand, beim Überwiegen von Parallelschaltungen der Leitwert als Ausdrucksweise bevorzugt.

Man kann nun Gemische und Legierungen als räumliche Netzschaltungen ansehen. Rein logisch ist bei einer derartigen Schaltung offenbar weder die Serien- noch die Parallelschaltung bevorzugt, es muß daher eine Formel erwartet werden, die für beide Ausdruckweisen — R oder L — dieselbe Form hat. Das leistet ein Ansatz nach dem geometrischen Mittel:

$$\begin{aligned} R(c) &= R_c^c \cdot R_c^c \\ L(c) &= L_c^c \cdot L_c^c. \end{aligned} \quad (20)$$

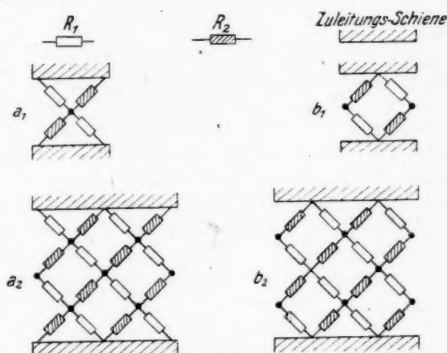


Abb. 5. Ersatzschaltbilder für Gemischwiderstand

Eine anschauliche Darstellung liefert ein Ersatzschaltbild, wie solche in der Elektrotechnik üblich sind. Man muß in Knotenstellen jeweils mindestens 4 Elemente zusammenschließen, um ein räumliches Netz zu ermöglichen. Nach Abb. 5 seien zunächst Netzelemente betrachtet, die zur Vereinfachung in die Zeichenebene gelegt sind. Dabei ist als Element a_1 ein Knoten, b_1 eine Masche genommen. Als Mischungsverhältnis ist wieder der einfachste Fall $1/1$ ($c_1 = c_2 = 0,5$) gewählt. Man übersieht leicht, daß a_1 eine verdoppelte Parallelschaltung, b_1 eine verdoppelte Serienschaltung darstellt. Setzt man $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, so wird der Gesamtwiderstand:

$$R_{a1} = 4/3 = 1,333 \quad R_{b1} = 3/2 = 1,5. \quad (21)$$

Darunter ist in derselben Abbildung die ebene Verknüpfung von je 4 derartigen Elementen gezeichnet. Zur Berechnung sind nunmehr die Kirchhoffschen Gesetze der Stromverzweigung und Spannungsteilung anzuwenden. Man erhält nach Elimination der je 16 Ströme I_{ik} und Spannungen U_{ik} den Gesamtwiderstand:

$$R_{a2} = 1768/1275 = 1,387 \quad R_{b2} = 2175/1475 = 1,475. \quad (22)$$

Mathematisch bedeutet das Verfahren eine recht umständliche Methode, um irrationale Zahlen zu berechnen, indem sich bei zunehmender Knoten- bzw. Ma-

schenzahl die beiden Ausdrücke offensichtlich dem irrationalen geometrischen Mittel ($\sqrt{2} = 1,414$) nähern, physikalisch liefert das Modell jedoch einem Einblick in die Ursache der verschiedenen Ergebnisse: Durch die Stromzuführung mittels vollkommen leitender Schienen werden Kurzschlüsse in die geometrischen Ebenen eingefügt, die damit zu Äquipotentialflächen werden. Durch die Kurzschlüsse wird der Widerstand verkleinert, als Grenzwert ergibt sich für a_1 das harmonische Mittel der Widerstände als kleinstes Ergebnis, entsprechend völliger Parallelschaltung. Umgekehrt bedeuten die seitlichen Grenzen der Abbildung eine Unterbrechung der Verbindungen, es werden isolierende Flächen eingefügt, die durch die Richtung des Potentialgradienten und beliebige Umhüllungskurven der Elemente gegeben sind. Durch die isolierenden Flächen wird der Widerstand vergrößert, als Grenzwert für unendlich viele Isolierungen liefert b_1 das größte Ergebnis, das arithmetische Mittel der Widerstände, völliger Serienschaltung entsprechend.

Das Ersatzschaltbild vernachlässigt die Übergangswiderstände, indem es jeweils 4 Schaltelemente durch einen idealen Kurzschluß zu einem Netzelement verbindet. In den reellen Gemischen, Legierungen usw. dürfen die Übergangswiderstände oft nicht vernachlässigt werden, Formel (20) genügt nicht ohne weitere Modifikationen zur Beschreibung der Vorgänge. Da nun das geometrische Mittel die weitaus unhandlichste Formel ist und spezielle Korrekturen ohnehin erforderlich sind, geht man praktisch einfacher vom arithmetischen Mittel der Widerstände oder Leitwerte aus und bringt daran die speziellen, dem Problem angepaßten Korrekturen an. Denn neben dem wissenschaftlichen Interesse an der Aufklärung der Transportmechanismen, das allerdings gerade durch die Untersuchung von Gemischen usw. gefördert werden kann, steht ja das praktische Interesse an handlichen Interpolationsformeln, für die nicht Exaktheit, sondern Einhaltung einer bestimmten Fehlergrenze bei möglichst einfacher Form zu fordern ist.

Bei Anwendung dieser Überlegungen auf die Transportvorgänge in Gasgemischen sieht man zunächst, daß die additiven Ansätze nach (14) und (15) keineswegs natürlich und zwangsläufig dem Problem angepaßt sind, sondern daß der natürliche Ansatz die Form des geometrischen Mittels (20) hat. Der additive Ansatz setzt näherungsweise Parallelschaltung voraus, die Berechtigung dieser Annahme muß zunächst modellmäßig belegt werden.

Für die Zähigkeit war oben bereits in der Modellbetrachtung erwähnt, daß die Entfernung der seitlichen Grenzen des Modells zu einer Transportvergrößerung führt. Das Modell (Abb. 3) stellt eine Serienschaltung dar, sie ist also nicht zur Deutung geeignet. Umgekehrt liefern die physikalisch durchaus reellen Strömungsflächen einen plausiblen Grund, Parallelschaltung zwischen diesen Strömungsflächen anzunehmen, die Formel also von additiven Ansatz her aufzubauen. Die von Sutherland mit bestem Erfolg eingeführten Korrekturen bedeuten in diesem Zusammenhang, daß die Strömungsflächen eben nicht ideal fest (Impulskurzschlüsse) und undurchdringlich sind.

Demgegenüber spricht bei der Wärmeleitung von Gasgemischen nichts gegen die Annahme einer Serienschaltung. Die Vernetzung der Transportbahnen entsteht ja eigentlich erst durch das zeitliche Nacheinander der Zusammenstöße, die seltenen Tripel- oder Mehrfachzusammenstöße können vernachlässigt werden. Man kann daher den Vorgang der Wärmeleitung plausibel beschreiben durch ein

ziemlich ungestörtes Nebeneinanderherlaufen von Molekülbahn-Serien, von denen nur diejenigen wesentlich zum Energietransport beitragen, die parallel zum Temperaturgradienten verlaufen. Es ist sogar einleuchtend, daß die Korrekturen dieses einfachen Ansatzes stärker durch Übergangswiderstände beim Zusammenstoß (Energieaustauschbehinderung), als durch Nebenschlüsse des Schaltbildes bedingt werden.

Die modellmäßige Voraussetzung der Formel (15): thermische Kurzschlüsse in den Flächen orthogonal zum Temperaturgradienten, ist gerade bei Gasen mit ihrer relativ kleinen Wärmeleitung sicher nicht erfüllt, bei Flüssigkeiten mögen die Verhältnisse bereits wesentlich anders sein.

Die relative Größe bzw. Anzahl der Schaltelemente ist nach den Modellvorstellungen durch die „wirksame Konzentration“ gegeben. Nimmt man nun an, daß beim Zusammenstoß verschiedenartiger Moleküle ein besonderer Stoßwiderstand auftritt, der zu einer Gemisch-Wärmeleitzahl λ_{12} führt, so kann man damit sogleich die dreigliedrige Formel für binäre Gemische aufstellen, indem man die Wärmewiderstände addiert. In Gasen kann ohne weiteres völlige Durchmischung angenommen werden, die Anzahl der verschiedenen Stoßkombinationen ist in diesem Falle durch die in c' quadratischen Glieder gegeben. Es gilt:

$$\frac{1}{\lambda_{(c)}} = \frac{c_1'^2}{\lambda_1} + \frac{c_2'^2}{\lambda_2} + \frac{2 c_1' c_2'}{\lambda_{12}} \quad (23)$$

In dieser Form enthält der Ansatz nur noch eine Konstante λ_{12} und ist schon dadurch den bisherigen Ansätzen mit zwei Konstanten überlegen.

Eine formale Ableitung gewinnt man aus dem einfachen harmonischen Ansatz:

$$\frac{1}{\lambda_{(c)}} = \frac{c_1'}{\lambda_1'} + \frac{c_2'}{\lambda_2'} \quad (24)$$

indem man einsetzt $\lambda_i' = \lambda_i / (c_i' + c_k' A_i)$ nach (9). Der Übergang von den Molekülkonzentrationen \hat{c}_i zu den wirksamen Konzentrationen c_i' läßt sich mit dem üblichen Formalismus der Gastheorie deuten als Berücksichtigung der Vorgeschichte der Moleküle entsprechend dem Jeansschen Persistenzbegriff²¹⁾; die einzuführenden Rechengrößen bleiben unbestimmbar und fallen bis auf eine Konstante, wie oben, wieder heraus, auf die Ausführung der Rechnung sei hier verzichtet. Für die Konstante liefert die Ableitung den Zusammenhang:

$$2/\lambda_{12} = A_1/\lambda_1 + A_2/\lambda_2 \quad (25)$$

Die Darstellung in der $A_1 A_2$ -Ebene liefert parallele Gerade, die in Abb. 4 als Kurvenschar III (durch den logarithmischen Maßstab gekrümmt) eingetragen sind. Die Reihenfolge der Kurven ist unregelmäßig, ein Zeichen dafür, daß sie nur infolge der Streuung der Versuchsergebnisse nicht zusammenfallen. Da die Kurven parallel verlaufen, kann man jeden beliebigen Punkt benutzen, an einfachsten $A_1 = A_2 = B$. $B = 1$ bedeutet Gültigkeit der zweigliedrigen Formel (24), in den folgenden Tabellen ist daher B mit aufgeführt, um zu zeigen, daß man mit diesem Ansatz unter Benutzung von $\lambda_i' = \lambda_i$ bereits eine Faustformel mit $\pm 10\%$ Genauigkeit besitzt.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die beiden Änderungen gegenüber dem bisherigen Ansatz (15) einander entgegen wirken: Das harmonische Mittel ist der kleinste der drei elementaren Mittelwerte, dagegen liefert die wirk-

²¹⁾ J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase. Vieweg, Braunschweig 1926.

same Konzentration durch die Bevorzugung des leichteren — und besser wärmeleitenden — Gases eine Vergrößerung der berechneten Wärmeleitzahl des Gemisches.

Die Größe λ_{12} läßt sich zweckmäßig, wie bereits aus (25) hervorgeht, aus einem Mittelwert von λ_1 und λ_2 und einer dimensionslosen Korrekturgröße in der Größenordnung von 1 darstellen. Wenn die oben angedeuteten Vorstellungen eines Energieaustauschwiderstandes physikalisch sinnvoll sind, muß es dafür auch einen Kalkül geben, der die Konstante in zwei Glieder (Summanden, Faktoren) zerlegt, die nur von den Eigenschaften der Einzelmoleküle abhängen.

Die Theorien der Molekularphysik unterscheiden mindestens 4 Wechselwirkungseffekte und es erscheint durchaus möglich, von dort aus die hier auftretenden Stoßwiderstände zu berechnen. Man könnte vor allem anschaulich an gewisse Resonanzerscheinungen denken, z. B. selektive Emission und Absorption von Wärmestrahlung, die natürlich einen Beitrag zur Wärmeleitung liefert, jedoch, von Ausnahmefällen abgesehen, nur zwischen gleichartigen Molekülen möglich ist. Da nun in der Gaskinetik bisher mehr oder weniger exakt nur 2 bis 3 molekulare Größen (Masse, Durchmesser, Anziehungspotential) berücksichtigt werden können, ist es zweckmäßig, hier nur einen Näherungsansatz einzuführen, dessen Berechtigung und präzise Darstellung erst in der Zukunft versucht werden kann. Man gewinnt dadurch zunächst einen groben Überblick über die Zusammenhänge und insbesondere Hinweise darauf, welche Gase und Gasgemische sich „normal“ oder „anormal“ verhalten.

Die einfachste Darstellungsmöglichkeit bietet ein multiplikativer Ansatz:

$$\lambda_{12} = p_1 \cdot p_2 \cdot \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = P_{12} \cdot \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}. \quad (26)$$

Die P_{ik} bzw. p_i bedeuten hier Potentialgrößen, die etwa den Anziehungskräften der Moleküle proportional sind. Die experimentellen Ergebnisse stimmen mit dieser Erwartung überein.

Wenn das experimentelle Material auch noch keineswegs ausreicht, weder dem Umfang, noch der Genauigkeit nach, um endgültige Folgerungen zu ziehen, so scheint die Formulierung nach (26) doch der Lösung schon nahe zu kommen und zumindest für gewisse Gruppen von Molekülen recht gut zu stimmen. Wegen der großen praktischen Bedeutung der Aufgabe, aus n Messungen die p_i -Werte von n Gasen zu bestimmen und daraus alle Wärmeleitzahlen der $n(n-1)/2$ Gemischreihen berechnen zu können, ist auch eine Näherungslösung bereits von Interesse. Die Mischungsregel lautet danach:

$$\frac{1}{\lambda_{(c)}} = \frac{c_1'^2}{\lambda_1} + \frac{c_2'^2}{\lambda_2} + \frac{2 c_1' \cdot c_2'}{p_1 p_2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}. \quad (27)$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es durch Vermittlung der Eucken'schen Formel (13) möglich ist, auch eine Berechnung der $\eta_{(c)}$ mittels der p_i durchzuführen bzw. umgekehrt die $P_{ik} = p_i \cdot p_k$ aus Zähigkeitsmessungen zu bestimmen. Es gilt nämlich:

$$\eta_{(c)} = \frac{\sum_i c_i m_i}{\sum_i K_i c_i \cdot \sum_i c_i m_i c_{vi}} \cdot \left(\frac{c_1^2}{\eta_1 K_1 c_{v1}} + \frac{c_2^2}{\eta_2 K_2 c_{v2}} + \frac{2 c_1 c_2}{p_1 p_2 \sqrt{\eta_1 \eta_2 K_1 K_2 c_{v1} c_{v2}}} \right). \quad (28)$$

In der Formel treten die c_i' nicht auf in Übereinstimmung mit der Feststellung, daß diese eine typische Korrektur des Energietransportes berücksichtigen, die

für den Impulstransport nicht in Betracht kommt. Die komplizierte Formel hat übrigens einige Ähnlichkeit mit der entsprechenden Formel (39) der Chapman'schen Arbeit (l. c.).

Auswertung und Diskussion des experimentellen Materials

Zur Überprüfung werden zunächst wieder die Werte der Tabelle 1 herangezogen. Tabelle 4 enthält für die 8 Gemischreihen die Werte von $P = p_1 p_2$ nach (26)

Tabelle 4

Gemisch	B	P	Fehler $F\%$ n. (29) bei der wirts. Konz. c'_1				
			0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
H ₂ /CO ₂	1,05	0,51	-0,3	+0,2	-2,2	-1,9	+4,5
H ₂ /Ar	0,93	0,61	+0,5	+1,3	-1,8	-2,0	+1,8
H ₂ /O ₂	1,16	0,59	+2,4	+2,7	-0,7	-5,5	+0,3
H ₂ /N ₂	1,10	0,61	+0,7	+5,2	-4,9	+0,7	-1,9
He/Ar	0,99	0,61	-0,5	-0,6	+0,3	+0,6	-0,4
NH ₃ /Luft	0,84	1,19	+0,5	-0,6	+0,3	+0,2	-0,7
			(0,3989)	(0,5961)	(0,7857)	(0,9110)	
H ₂ /N ₂ O	1,74	0,47	-0,2	±0	-0,8	+0,3	
			(0,1927)	(0,4096)	(0,4919)	(0,6947)	
H ₂ /CO	1,07	0,59	+1,1	±0	-0,3	+0,2	

und $B = A_1 = A_2$ nach (25), die in Formel (27) die Meßwerte am besten wiedergeben, sowie die Fehler F der nach (27) damit berechneten Wärmeleitzahlen $\lambda_{(c)}$ bei den verschiedenen wirksamen Konzentrationen c'_1 . F ist in Prozenten ausgedrückt nach der Formel

$$F = \frac{\lambda_{(c)} \text{ ber} - \lambda_{(c)} \text{ beob}}{\lambda_{(c)} \text{ beob}} \cdot 100. \quad (29)$$

Die Übereinstimmung ist zumindest nicht schlechter, als bei Verwendung der älteren Formeln, der Fehler ist jedenfalls nicht systematisch von der Konzentration abhängig. Zum Vergleich ist Abb. 4 zu beachten.

Die Streuung der Meßwerte und damit der Fehler F der Formel (27) wird tatsächlich um so kleiner, je genauer die Messungen sind. Die sehr zuverlässigen Messungen von Grüß und Schmick mit einer relativen Genauigkeit von 0,5% ergeben auch gegenüber Formel (27) keine größeren Abweichungen. Als Beispiel ist die Gemischreihe H₂O/Luft in Tabelle 5 dargestellt, wobei sich im Gegensatz

Tabelle 5
H₂O/Luft bei 80° C. $L_1 = 0,756 \cdot L_2$ $B = 0,725$ $P = 1,36$

	0,088	0,185	0,207	0,237	0,269	0,297	0,358	0,365	0,503	0,578
c'_1	0,071	0,150	0,171	0,197	0,225	0,250	0,306	0,312	0,444	0,519
$\lambda_{(c)}$	1,020	1,035	1,037	1,036	1,035	1,037	1,026	1,030	0,999	0,974
F	+0,3	-0,1	±0	+0,3	+0,5	-0,2	+0,3	-0,1	-0,4	-0,5

zu den bei Grüß und Schmick geäußerten Zweifeln mit dem Moserschen Wert $\lambda_{H_2O} = 0,756 \cdot \lambda_{\text{Luft}}$ bei 80° C sehr gute Übereinstimmung ergibt. Es ist das zumindest ein Beweis für die Anpassungsfähigkeit der Formel (27) an den Charakter der Funktion $\lambda_{(c)}$, worauf es ja eben ankommt. Der gewonnene Wert $P = 1,36$ ist

extrem und insofern fragwürdig, andererseits ist ein großer P - bzw. p -Wert für Wasser in bester Übereinstimmung mit dem bekannten großen Dipolmoment und sonstigen zwischenmolekularen Kräften des Wassermoleküls.

Die aus allen veröffentlichten Messungen der Wärmeleitzahl von Gasgemischen berechneten Werte P (und B) sind im linken Teil der Tabelle 7 zusammengestellt. Diese experimentellen Unterlagen genügen zwar, um die Brauchbarkeit der Formel (27) zu erweisen, sie reichen jedoch nicht aus, um die vermutete Beziehung (26) zu prüfen, d. h. die Zerlegbarkeit der P in zwei Faktoren p_i . Die Tabelle enthält 14 Gemischreihen aus 13 verschiedenen Gasen, darunter Luft, die in diesem Zusammenhang — da sie selbst ein Gemisch mehrerer Gase ist — nur mit einschränkender Vorsicht benutzt werden kann. Da hieraus 13 p zu berechnen sind, bleibt nur ein Wert zur Kontrolle der Beziehung (26).

Es wurde daher Formel (28) zu Hilfe genommen, um noch einige Werte aus Zähigkeitsmessungen zu berechnen. Als Beispiel dafür sind in Tabelle 6 die Werte

Tabelle 6
 N_2/C_2H_4 bei $0^\circ C$ $m_1 = m_2 = 28,0$ $K_1 = 1,93$ $K_2 = 1,43$ $c_{v1} = 0,1776$ $c_{v2} = 0,30$

$c'_1 = c'_2$	0,0	0,1407	0,2379	0,4305	0,5806	0,7595	0,9200	1,0
$Z_{(e)}$	93,8	101,3	107,2	120,4	130,7	146,0	159,8	166,0
$K_{(e)}$	1,43	1,500	1,549	1,645	1,720	1,809	1,890	1,93
$c_{v(e)}$	0,308	0,290	0,277	0,252	0,232	0,209	0,188	0,1776
$L_{(e)}$	41,4	44,1	46,1	50,5	52,1	55,2	56,7	56,9
P_{N_2/C_2H_4}	—	1,120	1,119	1,135	1,118	1,141	1,169	—

der Gemischreihe N_2/C_2H_4 für die gemessenen Konzentrationen zusammengestellt. Die letzte Zeile enthält die berechneten P . Die größte Abweichung derselben vom Mittelwert 1,13 zeigt der letzte Wert mit 3,2%. Das entspricht einer möglichen Unsicherheit des gemessenen $\eta_{(e)}$ von 0,6%. Die Übereinstimmung ist also völlig befriedigend, sie ist sogar besser als bei der Auswertung der meisten Wärmeleitfähigkeits-Messungen, die wegen der experimentellen Schwierigkeiten meist mit größeren Unsicherheiten behaftet sind. Damit ist die Brauchbarkeit der Formel (28) ebenfalls erwiesen, wenn auch für den praktischen Gebrauch die einfachere Formel (14) meist vorzuziehen sein wird.

Tabelle 7

Gemisch	B	P	$p_1 p_2$	Gemisch	P	$p_1 p_2$
H_2/CO_2	1,05	0,51	(0,51)	CO/N_2	1,01	1,02
H_2/N_2O	1,14	0,47	(0,47)	CO/O_2	1,02	1,01
H_2/Ar	0,93	0,61	(0,56)	CO/C_2H_4	1,10	1,12
H_2/O_2	1,16	0,59	(0,57)	H_2/C_2H_4	0,62	(0,63)
H_2/N_2	1,10	0,61	(0,58)	N_2/O_2	1,00	1,01
H_2/CO	1,07	0,59	(0,58)	N_2/C_2H_4	1,13	1,12
He/Ar	0,99	0,61	(0,61)	O_2/C_2H_4	1,14	1,11
$NH_3/Luft$	0,84	1,19	(1,18)	H_2/He	1,04	0,35
$CH_4/Luft$	1,01	0,99	(0,99)			
NH_3/Co	0,86	1,16	1,17			
$H_2O/Luft$	0,73	1,36	(1,36)			
N_2/Ar	1,00	0,99	(0,97)			
$C_2H_2/Luft$	0,95	1,04	(1,04)			
$CO/Luft$	0,99	1,01	(1,01)			

Der rechte Teil der Tabelle 7 enthält noch 8 derart berechnete P -Werte. Unter Hinzunahme von Äthylen sind hiermit alle 10 binären Gemischreihen der Gruppe: Wasserstoff, Kohlenmonoxyd, Stickstoff, Äthylen und Sauerstoff ausgewertet. Es zeigt sich, daß hierfür die Beziehung (26) mit etwa 2. . 5% Unsicherheit gültig ist. Für die Berechnung der $\lambda_{(c)}$ bzw. $\eta_{(c)}$ ist die hieraus resultierende Unsicherheit höchstens halb so groß.

Die p -Werte der reinen Gase sind in Tabelle 8 zusammengestellt, soweit sie sich aus den hier ausgewerteten Unterlagen ergeben. Ihre Produkte stehen in der letzten Spalte der Tabelle 7 neben den P zum Vergleich, wobei 14 Werte eingeklammert sind, um zu zeigen, daß nur 8 Werte zur Prüfung von (26) verfügbar sind; die anderen müßten nach Definition richtig sein, wenn sich nicht durch die Ausgleichsrechnung kleine Differenzen ergäben.

Die größten Abweichungen zeigen sich bei den Gemischreihen mit Wasserstoff, vor allem ist der Wert für H_2/He völlig falsch. Eine Erklärung hierfür kann vielleicht folgende Überlegung hinsichtlich der Rotationsfreiheitsgrade liefern. Man kann durch Überschlagerrechnung nachweisen, daß die Umfangsgeschwindigkeit eines rotierenden Moleküls

$v_u = \pi \cdot d \cdot n$ übereinstimmt mit der mittleren Translationsgeschwindigkeit bei der Temperatur, bei der die betreffende Rotation gerade angeregt wird (auf-taut). Diese Temperatur liegt bei Wasserstoff verhältnismäßig hoch, d. h. noch in der Nähe der üblichen Meßtemperaturen. Wenn der Mechanismus der Anregung, wie naheliegend, mit streifenden Zusammenstößen vor sich geht und daher von der Relativgeschwindigkeit der Moleküle unmittelbar abhängt, so kann in einem Gemisch mit schweren Gasmolekülen, die eine kleinere Translationsgeschwindigkeit haben, die Rotations-Anregung nur vermindert stattfinden. Das Einfrieren des Rotationsfreiheitsgrades infolge der Mischung mit schweren Molekülen bedeutet offenbar eine Behinderung des Energieaustausches und muß in kleinen Werten von P bzw. p_{H_2} zum Ausdruck kommen, die ihrerseits vom Molekulargewicht der beigemischten Gase abhängen. In der Tat ergeben die Gemischreihen mit einem Gewichtsverhältnis $m_2/m_{H_2} = 14 \dots 22$ Werte von p , die zwischen 0,55 und 0,62 streuen. Die Gemischreihe mit NH_3 ($m_2/m_1 = 8,5$) liefert infolge der Anomalie von Ammoniak uneinheitliche Werte $p_{H_2} = 0,7 \dots 1,0$ und die Reihe H_2/He mit $m_2/m_1 = 2$ liefert $p_{H_2} = 1,7$. Trotz der Unsicherheit dieser Zahlen kann man darin doch einen systematischen Gang mit dem Molekulargewicht des beigemischten Gases erkennen. Es wäre interessant, durch Messungen bei wesentlich höheren Temperaturen zu prüfen, ob diese Anomalie des Wasserstoffes verschwindet, wenn seine Rotationen — trotz Beimischung — voll angeregt sind, oder auch bei tiefen Temperaturen, wenn die Rotationsfreiheitsgrade ohnehin eingefroren sind.

Neben Wasserstoff liefert auch Helium mit $0,62 = p$ (aus He/Ar) einen sehr kleinen Wert. Als Edelgas hat He natürlich keine Rotationsfreiheitsgrade, die ganze Deutung erscheint daher fragwürdig. Leider liegen für He keine weiteren Wärmeleitzahl-Messungen an Gemischen vor, so daß ein Vergleich mit dem Verhalten von H_2 nicht angestellt werden kann. Es sei in diesem Zusammenhang er-

Tabelle 8

Stoff	p	Stoff	p
H_2	0,57	N_2	1,01
He	0,62	C_2H_4	1,11
CH_4	0,99	Luft	1,00
NH_3	1,18	O_2	1,00
H_2O	1,36	Ar	0,98
C_2H_2	1,04	CO_2	0,90
CO	1,01	N_2O	0,83

wähnt, daß nach einer Arbeit von Kohler²²⁾, in der die zusätzliche „Volumenviskosität“ aus Messungsergebnissen der Schallabsorption diskutiert wird, die Edelgase He und Ne stark erhöhte Absorptionswerte liefern, die theoretisch unverständlich sind.

Die p -Werte über 1,0 in Tabelle 8 treten bei Molekülen mit großem Dipolmoment oder starker Polarisierbarkeit auf, sind also in Übereinstimmung mit der Erwartung.

Die Vermutung von Grüß und Schmick (l. c.), daß die Symmetrie der Moleküle — Dipol- oder Quadrupol-Momente — für die Wärmeleitung der Gemische insofern entscheidend sei, daß sich Gemische aus Molekülen der gleichen Symmetriegruppe grundsätzlich anders verhalten, als Gemische aus Molekülen verschiedener Symmetrie, findet in den aufgeführten Zahlen keine Stütze, es ist jedoch verfrüht, aus dem geringen Material endgültige Schlüsse ziehen zu wollen.

Als vorläufiges Ergebnis kann festgehalten werden, daß p -Werte in der Nähe von 1 ein „normales“ Verhalten des betreffenden Gases zum Ausdruck bringen und daß für die Gemische solcher Gase die P_{ik} näherungsweise als $p_i \cdot p_k$ berechnet werden können. Die damit für die Vorausberechnung unbekannter Gemischwerte erzielbaren Ergebnisse dürften jedenfalls genauer sein, als die Annahme $P_{ik} = 1$. Dagegen scheint der einfache Ansatz nicht auszureichen, um die P_{ik} für solche Gemische vorauszuberechnen, bei denen p_i und p_k beide von 1 sehr verschieden sind. Während bei uneingeschränkter Gültigkeit von (26) aus Tabelle 8 91 Gemischreihen berechenbar wären, wovon 22 bereits in Tabelle 7 ausgewertet sind, werden durch obige Regel etwa die Hälfte der unbekannten Gemischreihen als unsicher ausgeschieden.

Eine besondere Anomalie zeigen einige Gemische mit Ammoniak. Während sich NH_3/CO völlig normal im Sinne der Formel (27) verhält, ist bei den Gemischreihen mit Luft und in noch stärkerem Maße mit Wasserstoff das berechnete P nicht konstant, sondern wächst mit zunehmender Ammoniak-Konzentration. Man geht wohl nicht fehl in der Annahme, daß das große Dipolmoment des Ammoniak-Moleküls in Verbindung mit den freien Nebervalenzen — NH_3 ist chemisch als Komplexbildner bekannt — zu Assoziationen der Ammoniak-Moleküle mit den Molekülen des beigemischten Gases führen. Daneben treten wahrscheinlich Assoziationen der NH_3 -Moleküle untereinander auf, die jedoch anscheinend nicht so stark konzentrationsabhängig sind, sonst müßten ja alle Gemischreihen mit Ammoniak die Anomalie zeigen. Formelmäßig wäre das Verhalten der anomalen Gemischreihen zu erfassen als Gemisch dreier Komponenten, als dritte Komponente der assoziierte Komplex gezählt, wobei die Wärmeleitzahl λ_3 , die Konstante p_3 und die Konzentration $c_3 = F(c_1, c_2, T)$ als neue Größen des gebildeten Komplexes in die Formel eingehen. Solange nicht mindestens die unbekannte Funktion $c_3 = F(\dots)$ aus anderen Messungen oder Theorien bekannt ist, hat es keinen Sinn, die formelmäßige Darstellung der Kurven mit Wendepunkt durchzuführen, da die erforderlichen Konstanten nicht eindeutig bestimmt werden können. Es leuchtet jedoch ein, daß die Darstellung möglich ist, von einem Versagen der Formel (27) kann nicht gesprochen werden.

Für die eben besprochenen Assoziationen ist eine starke Temperaturabhängigkeit von vornherein zu erwarten. Dagegen ergeben die Messungen der Gemischreihe $\text{C}_2\text{H}_2/\text{Luft}$ bei 20° und 65° C Übereinstimmung der P -Werte im Rahmen der

²²⁾ M. Kohler, Z. Physik **124**, 757 (1947).

Meßgenauigkeit (0,5%). Man darf daher annehmen, daß die P_{ik} — und soweit sie sich als brauchbar erweisen auch die p_i — im selben Umfang unabhängig von der Temperatur sind, wie die Konstanten der Euckenschen Formel: K oder die Sutherlandschen Konstanten C .

Zusammenfassung

Die Vorgänge der Wärmeleitung und inneren Reibung in Gasgemischen wurden mittels Modellvorstellungen behandelt.

Es ergab sich für die Wärmeleitung der Begriff einer „wirksamen Konzentration“, wobei die Konzentration des Gases mit kleinerem Molekulargewicht um die Wurzel aus dem Molekulargewichtsverhältnis vergrößert erscheint. Mit Anwendung dieser wirksamen Konzentration konnte die bekannte Beziehung zwischen Wärmeleitung und Zähigkeit reiner Gase auf Gasgemische gleicher wirksamer Konzentration ausgedehnt werden.

Für die Wärmeleitung von Gasgemischen ergab sich das Modell einer Serienschaltung und daraus für die Mischungsregel Additivität der Wärmewiderstände unter Benutzung der wirksamen Konzentrationen. Der Wärmewiderstand erschien zum wesentlichen Teil im molekularen Stoßprozeß begründet, der Wärmewiderstand beim Zusammenstoß verschiedenartiger Moleküle wurde durch eine empirische Konstante P berücksichtigt.

Die empirische Konstante ist näherungsweise als Produkt von Potentialkonstanten p der reinen Gase darstellbar, wofür die Diskussion anschauliche Zusammenhänge mit verschiedenen Molekül-Eigenschaften ergab, deren Berücksichtigung in der abstrakten Gastheorie bisher nicht möglich war.

Eine Erweiterung der Ansätze auf Gemische mit mehr als zwei Komponenten bietet formal keine Schwierigkeiten, mangels experimenteller Unterlagen wurde auf das Ausschreiben der Formeln verzichtet.

Zum Schluß sei Herrn Prof. Dr. H. Falkenhagen der herzlichste Dank für sein dem Fortgang der Untersuchung entgegengebrachtes Interesse und seine stetige Förderung durch anregende Diskussionen und Ratschläge ausgesprochen.

Rostock, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 1. September 1950.)

Diffusion thermischer Neutronen

(Exakte Theorie mit Berücksichtigung der Anisotropie der Einzelstreuung)

Von Detlof Lyons

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird das sogen. verallgemeinerte Albedo-Problem behandelt. Bisher war es nicht möglich, dieses Problem zu lösen, da die schräg einfallenden Neutronen durch keines der bekannten Näherungsverfahren berücksichtigt werden konnten. Selbst das von Wick entwickelte Näherungsverfahren führt hier nicht zum Ziel. Da für genauere Wirkungsquerschnittsmessungen für Kernreaktionen gerade das verallgemeinerte Albedo-Problem von größter Wichtigkeit ist, so lohnte es sich wohl, einen mathematischen Apparat, wie das hier geschehen ist, zu entwickeln, um das Problem zu lösen, namentlich da über das Albedo-Problem eine umfangreiche Literatur besteht, die zum größten Teil keine Ergebnisse brachte, die praktisch von Wert sind. Es wird hier nur das lineare Problem behandelt.

§ 1. Die Problemstellung

Es sei $f(x, u)$ die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der thermischen Neutronen, also $f(x, u) dx du$ gleich der mittleren Anzahl der thermischen Neutronen pro cm^2 , die sich im stationären Zustand zwischen x und $x + dx$ mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen u und $u + du$ befinden. Wir messen Längen in Einheiten der freien Weglänge und setzen den konstanten Geschwindigkeitsbetrag gleich Eins, so daß u der Kosinus des Winkels ist, den die Geschwindigkeitsrichtung eines Neutrons mit der positiven x -Achse einschließt.

Bei den Anwendungen ist zu beachten, daß die Streuung der thermischen Neutronen an den chemisch gebundenen Wasserstoffkernen nicht isotrop ist (s. Fermi l. c.). Diese Anisotropie der Einzelstreuung wollen wir hier aber zunächst nicht berücksichtigen, da sich herausstellt, daß die entsprechende Korrektur nachträglich angebracht werden kann, worauf gelegentlich im Text näher eingegangen werden soll. Bei isotroper Einzelstreuung genügt die Funktion $f(x, u)$ in Gebieten, die frei von Quellen thermischer Neutronen sind, der homogenen Gleichung:

$$D(f) = 0, \quad (1)$$

wo der Operator D [genau wie bei Wick¹⁾] definiert sein soll durch

$$\left. \begin{aligned} D(f) &= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) f(x, u) - \frac{\sigma}{2} \varrho(x) \\ \text{mit} \quad \varrho(x) &= \int_{-1}^{+1} f(x, v) dv. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ G. C. Wick, Z. Physik **121**, 702 (1943); s. a. D. Lyons, Ann. Physik (6) **4**, 379 (1949), Gl. (23).

$\varrho(x)$ ist die Neutronendichte. σ ist die Streuwahrscheinlichkeit beim Einzelstoß, also gleich dem Verhältnis:

$$\sigma = \frac{\sum n_i \sigma_{si}}{\sum n_i (\sigma_{si} + \sigma_{ai})}$$

(n_i = Anzahl der Kerne pro cm^3 mit Streu- bzw. Absorptionsquerschnitten σ_{si} bzw. σ_{ai}).

Die Gl. (1) ist bei Vorhandensein von Quellen bekanntermaßen durch ein Quellglied zu vervollständigen. Wir bemerken, daß Gl. (1) ein einfacher Spezialfall der Boltzmannschen Stoßgleichung ist.

Die beiden Probleme, die wir behandeln wollen, mögen folgendermaßen formuliert werden.

Problem I.

Die Quellen sollen in der Ebene $x = 0$ konzentriert sein und ihre Geschwindigkeitsabhängigkeit durch eine Funktion $q_0(u)$ gegeben. Im Unendlichen soll f verschwinden. Also:

$$\left. \begin{aligned} D(f) &= q(u) \delta(x) & -\infty < x < +\infty \\ f(x, u) &= 0 & \text{für } x \rightarrow \pm \infty \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$\delta(x)$ ist die Diracsche δ -Funktion $\left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \text{ für beliebiges } \varepsilon > 0 \right)^2$.

Problem II.

In der Ebene $x = 0$ befindet sich eine (unendlich) ausgedehnte Absorberplatte, die die auf sie treffenden Neutronen teilweise hindurchläßt; und zwar werde ein Neutron, das mit einem Richtungskosinus u auf die Platte fällt, mit der Wahrscheinlichkeit $e^{-\frac{v}{u}}$ hindurchgelassen: y ist also gleich μd , wo μ der Absorptionskoeffizient bei senkrechtem Auffall und d die Dicke der Platte ist. Wir nehmen die Absorberplatte geometrisch als unendlich dünn an (genauer: d sehr klein im Verhältnis zur freien Weglänge in der Bremssubstanz). Die Quellen seien mit konstanter Dichte isotrop über den ganzen Raum verteilt. Also:

$$\left. \begin{aligned} D(f) &= q = \text{Konst.} & -\infty < x < +\infty \\ f(+\varepsilon, u) &= e^{-\frac{v}{u}} f(-\varepsilon, u) & -1 < u < +1 \\ & & 0 < \varepsilon \ll 1 \\ f(x, u) &\text{ endlich, wenn } x \rightarrow \pm \infty^3. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Man kann es als Verallgemeinerung des Albedoproblems ansehen (s. Wick), in das es bei undurchlässiger Absorberplatte ($y = \infty$) übergeht.

§ 2

In Problem I, dem wir uns jetzt zuwenden, ist die Gleichung zu lösen:

$$D(f) = q(u) \delta(x), \quad (3)$$

²⁾ Unser Problem I ist eine Verallgemeinerung des Problems C bei Wick.

³⁾ Dieses Problem wurde von Wick als das Problem D formuliert.

wo der Operator D durch (2) definiert ist. Die Diracsche δ -Funktion läßt sich bekanntlich darstellen durch das Fourier-Integral:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{kx} dk.$$

Es ist daher dem Problem angepaßt, wenn man auch $f(x, u)$ nach Fourier zerlegt und setzt:

$$f(x, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{kx} \varphi(k, u) dk. \quad (4)$$

Man erhält dann aus (3) für die „Fourier-Transformierte“ $\varphi(k, u)$ folgende Integralgleichung:

$$(1 + ku) \varphi(k, u) - \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(k, v) dv = q(u).$$

Durch $1 + ku$ dividiert, über u integriert und nach $\int_{-1}^{+1} \varphi du$ aufgelöst ergibt:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(k, u) du = \frac{1}{w(k)} \int_{-1}^{+1} \frac{q(u) du}{1 + ku}, \quad (5)$$

worin zur Abkürzung:

$$w(k) = 1 - \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1 + ku} = 1 - \frac{\sigma}{2k} \log \frac{1+k}{1-k}. \quad (6)$$

Man kann sich auf die Berechnung von $\varrho(x)$ beschränken, denn bei bekanntem ϱ ist (3) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für f , deren Lösung sich sofort hinschreiben läßt⁴⁾. Integrieren wir (4) über u und setzen dann in die rechte Seite nach Vertauschung der Integrationsfolgen den Ausdruck (5) ein, so ergibt nochmalige Integrationsvertauschung:

$$\varrho(x) = \int_{-1}^{+1} q(u) du \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dk}{w(k)} \frac{e^{kx}}{1 + ku}. \quad (7)$$

Es kommt jetzt nur noch darauf an, das rechts stehende komplexe Integral über k für numerische Rechnungen geeignet umzuformen. Man könnte daran denken, dasselbe sofort in ein reelles überzuführen, indem man etwa $k = \frac{i}{t}$ setzt. Wegen $w(z) = 1 - \frac{\sigma}{z} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} z$ und $\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} iz = i \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$ bekommt man dann nach leichter Rechnung:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{t(t^2 + u^2)} \cdot \frac{t \cdot \cos \frac{x}{t} + u \sin \frac{x}{t}}{1 - \sigma t \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{t}}. \quad (8)$$

Wie man sieht, ist das Integral in der Form (8) sehr umständlich auszuwerten, da der Integrand wegen der \cos - bzw. \sin -Funktion im Integrationsintervall stark oszilliert. Für $x = 0$ läßt es sich in dieser Form dagegen verhältnismäßig leicht numerisch auswerten. Man findet dann, daß sein Wert sich für kleine $|u|$

⁴⁾ Eine spezielle Lösung findet sich auf S. 167 Gl. (39).

wie $\frac{1}{u}$ verhält, und daher nach (7), falls $q(u) = \text{const}$ angenommen war, $\lim_{x \rightarrow 0} \varrho(x)$ unendlich wird. Wir werden später für $q(u)$ als einfaches Beispiel eine Funktion einsetzen, die $q = \text{const}$ als Spezialfall enthält und mit deren Hilfe wir das Verhalten von $\varrho(x)$ für $x \rightarrow 0$ studieren können. Zuvor wollen wir aber das komplexe Integral in (7) unter Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes umformen, der unter gewissen Voraussetzungen den Integrationsweg über k geeignet zu deformieren gestattet. Dazu sind aber einige funktionentheoretische Betrachtungen über die Funktion (6) nötig, die jetzt eingeschaltet werden sollen.

§ 3. Die Funktion $w(k) = 1 - \frac{\sigma}{2k} \log \frac{1+k}{1-k} = 1 - \frac{\sigma}{k} \Re \Im k$

Wir deuten k als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene. Die Funktion $w(k)$ ist in den Punkten ± 1 verzweigt, denn umlaufen wir einen dieser Punkte etwa auf einem kleinen Kreise, so kommen wir nach einem vollen Umlauf nicht wieder zu dem alten Wert zurück, den $w = w(k)$ zu Anfang des Weges hatte. Bei positivem Umlauf nimmt w um $i\pi\sigma$ zu (falls der Kreis genügend klein ist, wie man leicht nachrechnet). Wir wollen nun in der k -Ebene einen Verzweigungsschnitt so legen, daß er entlang der reellen Achse über ∞ laufend die beiden Verzweigungspunkte ± 1 miteinander verbindet, und wir nennen „aufgeschlitzte k -Ebene“ den Teil der k -Ebene, der übrig bleibt, wenn man die Punkte des Schnittes in ihr fortläßt. Wir interessieren uns natürlich nur für den Zweig der Funktion $w = w(k)$, in dem w für $-1 < k < +1$ reell ist. Um die folgenden Überlegungen nicht unnötig zu komplizieren, beschränken wir uns auf die Werte w dieses Hauptzweiges, die nur für die Punkte k der aufgeschlitzten k -Ebene angenommen werden. (Schreiben wir dann etwa $w(\infty) = 1$, so soll damit gemeint sein: $\lim_{k \rightarrow \infty} w = 1$.)

Diese Werte w deuten wir als Punkte der w -Ebene. Ihre Gesamtheit macht auf ihr eine gewisse Punktmenge aus. Nun ist aber (falls k in der aufgeschlitzten k -Ebene liegt) $w = w(k)$ eine gerade Funktion von k , also $w(+k) = w(-k)$; das bedeutet, daß die Umkehrfunktion $k(w)$ zweiwertig ist, und wir können sagen, daß unsere Punktmenge über zwei übereinanderliegenden Blättern einer Riemannschen Fläche ausgebreitet ist. Um zu erfahren, wie diese beiden Riemannschen Blätter zusammenhängen, müssen wir die beiden Verzweigungspunkte der Umkehrfunktion $k(w)$ kennen, die sich bekanntlich aus $\frac{dw}{dk} = 0$ bestimmen. Wegen:

$$\frac{dk}{dw} = k \frac{dw}{dk} + w = \frac{1 - \sigma - k^2}{1 - k^2} \quad (9)$$

(w und $\frac{dw}{dk}$ können also nicht gleichzeitig verschwinden) erhält man dafür die Punkte $w = w(0) = 1 - \sigma$ und $w = w(\infty) = 1$. Zwischen diese beiden Verzweigungspunkte legen wir einen geradlinigen Schnitt (Länge $= \sigma < 1$), diesem entspricht die positiv- bzw. negativimaginäre Achse in der k -Ebene. Ebenso wie nun die linke und rechte k -Halbebene längs der imaginären Achse „aneinanderhängen“, so sind die beiden Riemannschen Blätter entlang dem (Schnitte von der Länge σ aneinandergeheftet zu denken. Die folgende Abbildung (in der vorläufig die Pfeile und die Kreise C_0 und C'_0 fortzudenken sind) soll die, durch die Funktion $w = w(k)$ vermittelte (konforme) Abbildung der linken aufgeschlitzten

k -Halbebene (linke Hälfte der Abb.) auf das „obere“ Riemannsche Blatt (rechte Hälfte der Abb.) veranschaulichen.

Man stelle sich hier den Linienzug $ABb\beta\alpha A$ so vor, daß der Kreisbogen $\alpha\beta$ ganz eng um den Verzweigungspunkt $k = -1$ läuft und dementsprechend sein Bild $\alpha'\beta'$ unendlich weit links liegt, analog sich die Viertelkreise Aa , Bb eng an

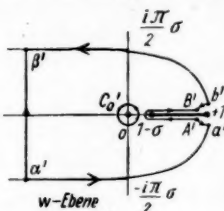
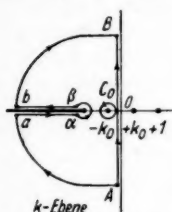


Abb. 1. Die durch die Funktion $w = w(k)$ vermittelte (konforme) „Abbildung“

wenn man den Linienzug in der linken Hälfte der Abbildung an der imaginären Achse spiegelte.) Wir bemerken: Dem Punkte $w = 0$ auf dem oberen (unteren) Blatt entspricht der Punkt $k = -k_0$ ($+k_0$), wenn k_0 die positive Wurzel von $w = 0$ ist, also der transzendenten Gleichung genügt:

$$k_0 = \operatorname{Irg} \frac{k_0}{\sigma}. \quad (10)$$

$w = 0$ hat weiter keine Wurzeln, die Wurzeln sind einfach, denn es ist $\frac{dw}{dk} \neq 0$.

Aus (9) kann man entnehmen, daß

$$\sqrt{1-\sigma} < k_0 < 1 \quad (0 < \sigma < 1)$$

ist. Da für $|k| < 1$ die Entwicklung gilt:

$$w(k) = 1 - \sigma \left(1 + \frac{k^2}{3} + \frac{k^4}{5} + \dots \right),$$

so findet man im Falle $\sigma \approx 1$ für k_0 :

$$k_0 = \sqrt{3(1-\sigma)}. \quad (11)$$

§ 4

Wir gehen jetzt zur angekündigten Umformung des komplexen Integrals in (7) über. Wir nehmen zunächst $x > 0$ an. Bemerkenswert ist, daß der Integrand in der aufgeschlitzten linken k -Halbebene einwertig ist und dort als einzige Singularität den einfachen Pol bei $k = -k_0$ besitzt. Wir betrachten zunächst das Integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dk}{w^{\frac{1}{2}}(1+ku)} e^{kx}, \quad (12)$$

wo der Integrationsweg C aus dem geschlossenen Linienzug $ABb\beta\alpha A$ der Abb. 1 (§ 3) bestehen soll. Den Betrachtungen des vorigen Paragraphen entnimmt man, daß nach dem Cauchyschen Integralsatz C auf den kleinen Kreis C_0 um $1 =$

— k_0 zusammengezogen werden darf. Entwickelt man $w(k)$ im Punkte $k = -k_0$, so hat man wegen $w(-k_0) = 0$:

$$w(k) \approx \left(\frac{dw}{dk} \right)_{k=-k_0} \cdot (k + k_0).$$

Nach (9) ist aber

$$\left(\frac{dw}{dk} \right)_{-k_0} = \frac{1}{k_0} \frac{k_0^2 - (1 - \sigma)}{1 - k_0^2}.$$

Die Integration über den unendlich kleinen Kreis C_0 (Residuens.) ergibt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint = k_0 \frac{1 - k_0^2}{k_0^2 - (1 - \sigma)} \cdot \frac{e^{-k_0 x}}{1 - k_0 u}. \quad (13)$$

Der Integrationsweg C ist zusammengesetzt aus dem ursprünglichen Integrationsweg von $-i\infty$ bis $+i\infty$ („von A bis B' “ in der Abb. 1), den beiden unendlich großen Viertelkreisen Bb und aA , auf welchen, wie man wegen $x > 0$ leicht nachweist, der Integrand mit wachsendem Kreisradius exponentiell verschwindet, und endlich dem noch verbleibenden Teil ba , der längs des Verzweigungsschnittes (von $-\infty$ bis -1) um diesen herumläuft. Wir bezeichnen letzteren, in entgegengesetztem Sinne durchlaufend, mit C_{ab} und haben dann

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} = \oint_C = \oint_{C_{ab}}. \quad (14)$$

Im Falle $u > 0$ wollen wir den Weg C_{ab} noch etwas modifizieren, wie in der folgenden Abb. 2 angedeutet ist:

Der auf dem Schnitte liegende Punkt $k = -\frac{1}{u}$, wo der Integrand singulär werden würde, sollen die beiden Halbkreise $\alpha_1 \alpha_1$ und $\beta_1 \beta_1$ vom Radius δ (mit $\delta \rightarrow 0$) in positivem Sinne durchlaufen werden.

Da der Integrand in Punkten, die spiegelbildlich zur reellen Achse liegen, konjugiert-komplexe Werte annimmt, läßt sich das Integral über C_{ab} nach Ausführung der Integration über die beiden kleinen Halbkreise schreiben:

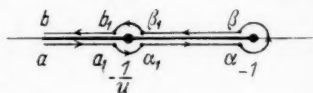


Abb. 2

$$\int_{C_{ab}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{u} - \delta} + \int_{-\frac{1}{u} + \delta}^{-1} \right) \frac{dk}{|w(k)|} \frac{e^{i|\arg w(k)| + kx}}{1 + ku} + i\pi e^{i|\arg w(-\frac{1}{u})| - \frac{x}{u}} + \text{Konj.} \quad (u > 0) \quad (11)$$

Für $u < 0$ ergibt sich einfach:

$$\int_{C_{ab}} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dk}{|w(k)|} \frac{e^{i|\arg w(k)| + kx}}{1 + ku}. \quad (u < 0) \quad (12)$$

Nach einigen kleinen nun zwangsläufigen Umformungen erhält man mit (14), (13) aus (7) für $q(x)$ wenn $x > 0$:

$$q(x) = \int_{-1}^{+1} q(u) du \left[\frac{-k_0(1 - k_0^2)}{k_0^2 - (1 - \sigma)} \frac{e^{-k_0 x}}{1 - k_0 u} + \frac{A_\sigma(u)}{u} e^{\frac{x}{u}} + J_\sigma(x, u) \right], \quad (15)$$

worin:

$$\left. \begin{aligned} A_{\sigma}(u) &= \frac{1 - \frac{\sigma}{2} u \log \frac{1+u}{1-u}}{\left(1 - \frac{\sigma u}{2} \log \frac{1+u}{1-u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} \pi u\right)^2}, & (u > 0) \\ &= 0 & (u < 0) \\ J_{\sigma}(x, u) &= \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t-u} \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\left(1 - \frac{\sigma t}{2} \log \frac{1+t}{1-t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} \pi t\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Der Strich am Integral soll bedeuten, daß im Falle $u > 0$ der Punkt $t = u$ aus dem Integrationsgebiet $0 \leq t \leq 1$ fortzulassen ist, also $\int_0^1 dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^{u-\delta} + \int_{u+\delta}^1 \right) dt$ für $u > 0$, während $\int_0^1 dt = \int_0^1 dt$ für $u < 0$ ist.

Für $x < 0$ läßt sich ϱ nun leicht bestimmen, wenn man bedenkt, daß das komplexe Integral in (7), dem die eckige Klammer in (15) entspricht, ungeändert bleibt, wenn man die Vorzeichen von x , k und u gleichzeitig umkehrt. Daher gilt: ($x > 0$)

$$\varrho(-x) = \int_{-1}^{+1} q(u) du \quad (17)$$

Die eckige Klammer $[\]$ hat die gleiche Bedeutung wie in (15). Ist speziell $q(-u) = q(+u)$, so gilt $\varrho(-x) = \varrho(+x)$, was auch ohne weiteres verständlich ist.

Wir wollen die Formel (15) für den Fall $\sigma = 0$ (fehlende Streuung) nachprüfen, wo sich (3) dann als gewöhnliche Differentialgleichung sofort integrieren läßt. Man findet $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{k_0(1-k_0)}{k_0^2 - (1-\sigma)} = 0$, ferner ist $A_0 = 1$ bzw. 0 für $u > 0$ bzw. $u < 0$ und $J_0 \equiv 0$. Daher wird ($\sigma = 0$):

$$\varrho(x) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{du}{u} q(u) e^{-\frac{x}{u}} & (x > 0) \\ \int_{-1}^0 \frac{du}{u} q(u) e^{-\frac{x}{u}} & (x < 0), \end{cases}$$

wie man auch leicht direkt aus (3) berechnen kann.

Der andere Grenzfall $\sigma \approx 1$ hat besonderes Interesse, da er dem Falle stark wasserstoffhaltiger Bremssubstanz entspricht. Man erhält wegen (11) $k_0 = \sqrt{3(1-\sigma)} \ll 1$ für $x > 0$:

$$\varrho(x) = \int_{-1}^{+1} du q(u) \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1-\sigma}} e^{-\sqrt{3(1-\sigma)} x} + A_1(u) \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u} + J_1(x, u) \right].$$

Der zweite und dritte Term ist relativ klein gegenüber dem ersten Term, der den großen Zahlenfaktor $\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}$ enthält. Für nicht allzu kleine x haben wir also

$$\text{angenähert: } \left[\bar{q} = \int_{-1}^{+1} q(u) du \right]$$

$$\varrho(x) = \bar{q} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1-\sigma}} \cdot e^{-\sqrt{3(1-\sigma)} \cdot x} \quad (x > 0).$$

Für sehr kleine x hängt die Dichte $\varrho(x)$ stark von $q(u)$ ab, namentlich von dem Verhalten für kleine u . Wir wollen für $q(u)$ speziell folgende Funktion einsetzen:

$$q(u) = \frac{|u|}{y} \left(1 - e^{-\frac{y}{|u|}} \right), \quad \text{mit } 0 < y \ll 1. \quad (18)$$

Für $x \approx 0$ ergibt sich dann nach einiger Rechnung genähert:

$$\varrho(x \approx 0) = \sqrt{\frac{3}{1-\sigma}} + 1,83 - \frac{x}{y} \log \left(1 + \frac{y}{x} \right) - \log(x+y). \quad (19)$$

Diese Formel werden wir im nächsten Paragraphen auf das Problem II anwenden.

§ 5

Jetzt wenden wir uns dem Problem II zu. Zunächst behandeln wir den Grenzfall $y \ll 1$, wo die Absorberplatte fast durchlässig für thermische Neutronen ist. Wir haben zu lösen:

$$D(f) = q (= \text{const}) \quad -\infty < x < +\infty \quad (20)$$

unter der Grenzbedingung bei $x \approx 0$:

$$f(+\varepsilon, u) = e^{-\frac{y}{u}} f(-\varepsilon, u), \quad -1 \leq u \leq +1 \quad (21)$$

ε ist eine kleine positive Zahl. Wir fassen hier nur den praktisch wichtigen Fall $\sigma \approx 1$ ins Auge und müssen, damit das folgende Näherungsverfahren anwendbar ist, für y die schärfere Forderung stellen:

$$\frac{y}{\sqrt{1-\sigma}} \ll 1. \quad (22)$$

Die Bedingung $y \ll 1$ ist dann von selbst erfüllt. Die nullte Näherung sei $f_0(x, u) = \frac{q}{1-\sigma} = \text{const}$, d. i. die Lösung von (20), (21) für $y = 0$. Als erste Näherung setzen wir an:

$$f(x, u) = \frac{q}{1-\sigma} + y f_1(x, u) + O(y^2), \quad (23)$$

also eine Entwicklung nach Potenzen von y , die bei dem linearen Glied abgebrochen wird. Setzen wir dies in die Grenzbedingung (21) ein, so erhalten wir in erster Näherung:

$$\frac{q}{1-\sigma} + y f_1(+\varepsilon, u) = e^{-\frac{y}{u}} \left[\frac{q}{1-\sigma} + y f_1(-\varepsilon, u) \right],$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$f_1(+\varepsilon, u) - f_1(-\varepsilon, u) = -\frac{1 - e^{-\frac{y}{u}}}{y} \left[\frac{q}{1-\sigma} + y f_1(-\varepsilon, u) \right].$$

Unser Problem II ist nun so beschaffen, daß die Funktion f ungeändert bleibt, wenn man die Vorzeichen von x und u gleichzeitig umdreht. Daher können wir für die letzte Gleichung schreiben:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x} dx = \mp \frac{1 - e^{-\frac{y}{|u|}}}{y} \left[\frac{q}{1 - \sigma} + y f_1(\mp \varepsilon, |u|) \right], \quad (24)$$

wo das obere bzw. untere Zeichen für $u > 0$ bzw. $u < 0$ zu nehmen ist. Das Glied $y f_1$ in der Klammer rechts ist, wie wir gleich sehen werden, zu den Gliedern höherer Ordnung zu rechnen. Lassen wir es fort, so ergibt sich aus (24) mit (2) wegen $\varepsilon \ll 1$:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} D(f_1) dx = -q_y(u) \frac{q}{1 - \sigma}, \quad (25)$$

wo $q_y(u)$ die Quellenverteilung (18) in unserem früheren Beispiel ist. Da f_1 Lösung der homogenen Gleichung $D(f_1) = 0$ ist, können wir statt (25) auch schreiben:

$$D(f_1) = -\frac{q_y(u) q}{1 - \sigma} \delta(x). \quad (26)$$

Die Bestimmung von f_1 ist damit auf das Problem I zurückgeführt. Es ergibt sich daher angenähert $y f_1(\mp \varepsilon, |u|) = q \frac{\sqrt[3]{3} y}{(1 - \sigma)^{1/4}}$, was wegen der Bedingung (22) zeigt, daß das in (24) fortgelassene Glied $y f_1$ wirklich zu vernachlässigen ist. Wir berechnen $\frac{q(\infty)}{q(\varepsilon)}$. Mit (23) ergibt sich nach den Resultaten des vorigen Paragraphen (es ist $q(\infty) = \frac{2q}{1 - \sigma}$):

$$\frac{q(\infty)}{q(\varepsilon)} = 1 + \frac{y}{2} \left[\sqrt{\frac{3}{1 - \sigma}} + \kappa(\varepsilon, y) \right], \quad (27)$$

worin

$$\kappa(\varepsilon, y) = 1,83 - \frac{|\varepsilon|}{y} \log \left(1 + \frac{y}{|\varepsilon|} \right) - \log(|\varepsilon| + y). \quad (28)$$

In praktischen Fällen wird die Ungleichung:

$$\kappa(\varepsilon, y) \ll \sqrt{\frac{3}{1 - \sigma}} \quad (29)$$

genügend genau erfüllt sein, so daß $\kappa(\varepsilon, y)$ eine kleine Korrektur darstellt. Ein Beispiel: Mit Wasser als Bremssubstanz hat man: $\sqrt{\frac{3}{1 - \sigma}} \approx 25$. Wir wollen q im Abstand 0,006 cm von der Absorberplatte messen: wegen $\lambda \approx 0,3$ cm (freie Weglänge in Wasser) ist $\varepsilon = \frac{1}{50}$, ferner sei $y = \frac{1}{50}$. Dafür ergibt sich aus (28) $\kappa = 4,4$. Wir bemerken hier noch einmal ausdrücklich, daß unsere Darstellung stark schematisiert ist, denn wir nehmen den Indikator geometrisch als unendlich dünn an. Ferner war die Einzelstreuung als isotrop vorausgesetzt, der, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, durch einfache Überlegung Rechnung getragen werden kann.

§ 6

Wie in unserer Einleitung erwähnt, läßt sich das von Wick angegebene Verfahren auf das vorliegende Problem nicht anwenden. Trotzdem wird es nützlich sein, unsere Aufgabe im linearen Modell von Fermi, dessen geeignete Verallgemeinerung bekanntlich das Wicksche Verfahren darstellt, zu lösen, da, wie wir sehen werden, die schon öfters erwähnte Anisotropie der Einzelstreuung genügend genau im linearen Modell beschrieben werden kann und im exakten Modell erst nachträglich berücksichtigt zu werden braucht. Wir haben uns dann später nur noch mit dem einfacheren Problem isotroper Einzelstreuung zu befassen. Fermi hat nun mit Hilfe des linearen Modells die Störung einer homogenen Neutronenverteilung dadurch angenähert bestimmt, daß er nach Einführung des Reflexionskoeffizienten β^a (Albedo) die von den Quellen kommenden Neutronen in Gruppen nach den Anzahlen elastischer Stöße einteilt, die sie gegen die Wasserstoffkerne machen, ehe sie von ihnen eingefangen werden.

Ganz analog gehen wir auch jetzt vor. Sei also β die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein auf einen Halbraum ($x > 0$ oder $x < 0$) fallendes Neutron aus diesem zurückgestreut wird. Im linearen Modell haben die Neutronen nur Bewegungsrichtungen nach links oder rechts, und zwar sind die Geschwindigkeitsvektoren gegen die x -Achse um den Winkel $+$ bzw. $- \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ geneigt. Andere Geschwindigkeitsrichtungen gibt es nicht. Neben der bei $x = 0$ befindlichen Absorberplatte befinde sich unmittelbar rechts daneben der dünne Indikator. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein auf den Absorber bzw. Indikator fallendes Neutron eingefangen wird, sei ζ_a bzw. ζ_i . Es ist $\zeta_a = 1 - e^{-\sqrt{3}y}$, wo y dieselbe Bedeutung wie früher hat. Betrachten wir ein Neutron, das im rechten Halbraum gerade thermisch geworden ist (Quelleneutron) und den Indikator aktiviert. Es wird dann entweder gleich vom Indikator absorbiert (Wahrscheinlichkeit ζ_i) oder es durchfliegt ihn, wird, nachdem es den Absorber durchlaufen hat, im linken Halbraum reflektiert, wieder vom Absorber hindurchgelassen und erst dann vom Indikator eingefangen [Wahrscheinlichkeit $(1 - \zeta_i)(1 - \zeta_a)\beta(1 - \zeta_a)\zeta_i$] oder es wird nach dem ersten Rückgang vom Indikator nicht absorbiert, sondern im rechten Halbraum reflektiert und erst dann vom Indikator eingefangen [Wahrscheinlichkeit $(1 - \zeta_a)^2[(1 - \zeta_i)\beta]^2\zeta_i$] u. s. f. Um die Wahrscheinlichkeit zu bekommen, daß das ursprüngliche von rechts kommende Neutron den Indikator aktiviert (d. h. von ihm irgendwann eingefangen wird), haben wir alle soeben aufgestellten Wahrscheinlichkeiten zu addieren und erhalten

$$w_r = \zeta_i \{ 1 + (1 - \zeta_a)^2 [(1 - \zeta_i)\beta] + (1 - \zeta_a)^2 [(1 - \zeta_i)\beta]^2 + (1 - \zeta_a)^4 [(1 - \zeta_i)\beta]^3 + \dots \}.$$

Ganz ähnlich ergibt sich für die entsprechende Wahrscheinlichkeit w_l , daß ein ursprünglich von links kommendes Neutron den Indikator aktiviert:

$$w_l = \zeta_i \{ (1 - \zeta_a) + (1 - \zeta_a) [(1 - \zeta_i)\beta] + (1 - \zeta_a)^3 [(1 - \zeta_i)\beta]^2 + (1 - \zeta_a)^3 [(1 - \zeta_i)\beta]^4 + \dots \}.$$

^a) Im exakten Modell läßt sich ein analoger Reflexionskoeffizient nicht mehr definieren, trotzdem besteht aber zwischen unserem späteren exakten Verfahren eine gewisse Analogie zur Fermischen Methode, indem auch hier eine Gruppenteilung stattfindet. Jeder einzelnen Gruppe entspricht ein Glied einer Neumannschen Reihe, die als Lösung der Integralgleichung des Problems auftritt. Diese Bemerkung kann von Wichtigkeit sein, wenn man die Konvergenz unseres Verfahrens nachprüfen will.

Wir wollen die Quellverteilung der thermischen Neutronen als symmetrisch um die Ebene $x = 0$ annehmen. Dann ist die wirkliche Aktivierung $A(\zeta_i, \zeta_a)$ proportional zu $w_r + w_l$. Fassen wir den ersten dritten, Summanden von w_r mit dem zweiten, vierten, ... von w_l zusammen, so ergibt sich als Summe dieser Glieder: $\zeta_i/[1 - \beta(1 - \zeta_i)(1 - \zeta_a)]$. Die Summe der restlichen Glieder in $w_r + w_l$ wird $\zeta_i(1 - \zeta_a)/[\dots]$. Somit bekommen wir (bis auf einen Faktor):

$$A(\zeta_i, \zeta_a) = \frac{\zeta_i(2 - \zeta_a)}{1 - \beta(1 - \zeta_i)(1 - \zeta_a)}.$$

Wir bilden das Verhältnis der Aktivierung ohne Absorber ($\zeta_a = 0$) zu der mit Absorber ($\zeta_a \neq 0$). Nach einfacher Rechnung ergibt sich wegen $\zeta_a/(2 - \zeta_a) = \mathfrak{I}g \frac{\sqrt{3}}{2} y$:

$$\frac{A(\zeta_i, \zeta_a = 0)}{A(\zeta_i, \zeta_a)} = 1 + \frac{1 + \beta(1 - \zeta_i)}{1 - \beta(1 - \zeta_i)} \mathfrak{I}g \frac{\sqrt{3}}{2} y. \quad (30)$$

Nach Fermi ist β bei kugelsymmetrischer Einzelstreuung durch folgenden Ausdruck gegeben [bei Fermi steht N für $1/(1 - \sigma)$]:

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - \sigma}}{1 + \sqrt{1 - \sigma}} \quad \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma}} \right). \quad (31)$$

Im Falle unendlich dünnen Indikators ($\zeta_i = 0$) wollen wir für die linke Seite von (3) $\frac{e_{y=0}}{e_y}$ schreiben (die Aktivität ist dann proportional zur Neutronendichte g) und erhalten für $y \ll 1$ aus (30)

$$\frac{e_{y=0}}{e_y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma}} \frac{\sqrt{3}}{2} y. \quad (32)$$

Vergleicht man dies mit (27) des vorigen Paragraphen, so findet man vollständige Übereinstimmung mit (32), falls man $\kappa \approx 0$ setzt. Das bedeutet, daß, wenn man von κ als Korrekturgröße absieht, das lineare Modell im Fall $y \ll 1$ dasselbe liefert wie das exakte Modell. Daraus können wir u. a. entnehmen, daß die frühere Bedingung (22) für y für die Gültigkeit des Ergebnisses (27) unwesentlich ist, und daher die Formel (27) wohl noch einigermaßen das Richtige liefern wird, wenn y in die Größenordnung $\sqrt{1 - \sigma}$ kommt, denn in (32) war nur gefordert: $y \ll 1$, damit der $\mathfrak{I}g$ durch sein Argument ersetzt werden kann. Bei Berücksichtigung der Anisotropie der Einzelstreuung hat man für den Reflexionskoeffizienten β einen etwas anderen Ausdruck zu nehmen:

$$\beta = \frac{\sqrt{1 - \cos \Theta} - \sqrt{1 - \sigma}}{\sqrt{1 - \cos \Theta} + \sqrt{1 - \sigma}}, \quad (33)$$

wie an anderer Stelle näher ausgeführt ist^{*)}. $\cos \Theta$ ist hierbei der Mittelwert des Kosinus des Winkels, um den ein Neutron beim elementaren Streuprozess aus seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt wird. Wir haben dann:

$$\frac{e_{y=0}}{e_y} = 1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \Theta}{1 - \sigma}} f(y), \quad (34)$$

^{*)} Siehe Ann. Physik (6) 4, 379 (1949); s. a. Fußn. 1.

mit $f(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} y$ für $y \ll 1$. Im linearen Modell gilt $f(y) = \mathfrak{I}g \frac{\sqrt{3}}{2} y$. Bei undurchlässigem Absorber ($y = \infty$) wird $f \approx 1$ (Albedoformel). Wir schließen daraus, daß auch im exakten Modell $f(y)$ nicht merklich vom elementaren Winkelverteilungsgesetz abhängen wird. Es genügt daher, $f(y)$ unter der Voraussetzung isotroper Einzelstreuung zu berechnen, was in dem nächsten Paragraphen geschehen soll.

§ 7. Die Ableitung der Integralgleichung des Problems

Wir wollen die vereinfachenden Annahmen noch einmal kurz formulieren:

1. Die Einzelstreuung ist isotrop. 2. Die Quellverteilung der thermischen Neutronen ist über den ganzen unendlich ausgedehnten Raum konstant ($q = \text{const.}$). 3. Die Absorberplatte (bei $x = 0$) ist geometrisch unendlich dünn.

Die Fundamentalgleichung lautet:

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x} + 1\right) f(x, u) - \frac{\sigma}{2} \varrho(x) = q, \quad (35)$$

wo

$$\varrho(x) = \int_{-1}^{+1} f(x, u) du \quad (36)$$

abkürzend die Neutronendichte bezeichnet. Um $x = 0$ herrscht Symmetrie in dem Sinne, daß $f(x, u) = f(-x, -u)$ und daher $\varrho(x) = \varrho(-x)$ ist. Daher genügt es, nur x -Werte zu betrachten für einen Halbraum ($0 \leq x \leq \infty$), an dessen Grenzen:

$$f(0, u) = e^{-\frac{u}{u}} f(0, -u), \quad u > 0 \quad (37)$$

$$f(\infty, u) \text{ endlich.} \quad (38)$$

Wäre $\varrho(x)$ schon bekannt, so ergäbe sich $f(x, u)$ als Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung (35) in x , das den Randbedingungen (37) und (38) genügt. Man findet:

$u > 0$:

$$f(x, u) = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{u} \int_0^x e^{\frac{x_1 - x}{u}} \varrho(x_1) dx_1 + q \left(1 - e^{-\frac{x}{u}}\right) + e^{-\frac{(x+u)}{u}} f(0, -u) \quad (39)$$

$$f(x, -u) = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{u} \int_x^\infty e^{\frac{x - x_1}{u}} \varrho(x_1) dx_1.$$

Wir führen jetzt die für alle k mit pos. Realteil analytische Funktion $\psi(k)$ ein, die definiert ist durch die Laplace-Transformation:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \varrho(x) dx = \frac{2}{\sigma} \left[\psi(k) - \frac{q}{k} \right]. \quad (40)$$

Setzt man dann in Gl. (39) $x = 0$, so ergibt sie mit (40):

$$\left. \begin{aligned} u f(0, -u) &= \psi\left(\frac{1}{u}\right); & u > 0 \\ u f(0, u) &= e^{-\frac{u}{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right). & u > 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

während aus (37) und (40) folgt:

Wir wollen die Funktion $\psi(k)$ nun auch in (35) einführen. Dazu multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit e^{-kx} und integrieren über x von 0 bis ∞ . Die Ableitung nach x schaffen wir dann durch partielle Integration fort. Beide Seiten der so entstehenden Gleichung dividieren wir durch $1+k$ und erhalten nach Integration über u von -1 bis $+1$ mit Benutzung von (36) und (40) (nach Multiplikation mit $\frac{\sigma}{2}$):

$$w(k) \psi(k) - \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{u f(0, u)}{1 + ku} du = \frac{q}{k}, \quad (42)$$

mit:

$$w(k) = 1 - \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1 + ku} = 1 - \frac{\sigma}{2k} \log \frac{1+k}{1-k}. \quad (6)$$

Nun drücken wir $u f(u, 0)$ noch durch ψ mittels (41) aus und erhalten nach Einführung der Integrationsvariablen $\frac{1}{u}$ an Stelle von u :

$$T \psi(k) = \frac{q}{k} + \frac{\sigma}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-vk_1} \psi(k_1) dk_1}{(k_1 + k) k_1}, \quad (43)$$

wo der Operator T durch die Identität:

$$T \psi(k) \equiv w(k) \psi(k) + \frac{\sigma}{2} \int_1^{\infty} \frac{dk_1}{(k_1 - k) k} \psi(k_1) \quad (44)$$

definiert ist. Wir wollen die Integralgleichung (43) noch auf eine bequemere Form bringen. Wir betrachten dazu vorübergehend die Gleichung:

$$T \psi_1(k) = \frac{g(k_1)}{k_1 + k}, \quad (45)$$

worin $\operatorname{Re} k_1 \geq 0$ ist und für diese k_1 -Werte die sonst willkürliche Funktion $g(k_1)$ analytisch ist. (43) ist eine Superposition von Gleichungen der Form (45). Die Lösung von (45) lautet nach Halpern, Lueneburg und Clark⁷⁾

$$\psi_1(k) = \frac{g(k_1)}{k_1 + k} p(k_1) p(k), \quad (46)$$

worin $p(k)$ die durch die „Zerlegungsformel“:

$$w(k) = \frac{1}{p(k) p(-k)} \quad (47)$$

definierte Funktion ist, und die der Bedingung unterworfen ist, daß sie für zumindest alle k mit positivem Realteil analytisch ist (vgl. § 8). Daher kann (43) durch die ihr äquivalente Integralgleichung:

$$\psi(k) = \frac{q p(0) p(k)}{k} + \frac{\sigma}{2} \int_1^{\infty} dk_1 \frac{e^{-vk_1} p(k_1) p(k) \psi(k_1)}{k_1 (k_1 + k)} \quad (48)$$

⁷⁾ Halpern, Lueneburg u. Clark, Phys. Rev. **53**, 173 (1938); Halpern u. Lueneburg, Phys. Rev. **76**, 1811–1819 (1949).

ersetzt werden. Diese Integralgleichung, die wir in § 9 lösen wollen, geht im Grenzfalle $y = \infty$ in eine einfache Gleichung über. Für das Verhältnis $\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)}$ ergibt sich dann mit (48):

$$\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} = \frac{\lim_{k \rightarrow 0} k \int_0^{\infty} e^{-kx} \varrho(x) dx}{\lim_{k \rightarrow \infty} k \int_0^{\infty} e^{-kx} \varrho(x) dx} = \frac{p(0)^2 - 1}{p(0)p(\infty) - 1}. \quad (49)$$

Nun ist nach (42):

$$p(0) = \lim_{k \rightarrow 0} p(k) = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}$$

$$p(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(k) = 1$$

[beim letzten Grenzübergang hat man zu beachten, daß k wenigstens für $|k| \geq 1$ keine reellen Werte durchlaufen darf, da dann das Integral in (42) keinen Sinn hat]. Für die rechte Seite von (49) bekommen wir $p(0) + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} + 1$. Setzen wir mit Fermi $\sigma = \frac{N-1}{N}$, so wird:

$$\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} = 1 + \sqrt{N}. \quad (50)$$

(50) ist die bekannte „Albedo-Formel“ von Fermi, die von H. L. C. auf ähnliche Weise abgeleitet wurde. [Diese Formel (50) ist aber zur genauen Diskussion nicht geeignet, da sie unter Voraussetzung der Isotropie beim Prozeß der Einzelstreuung abgeleitet ist (s. o.). Statt N hat man näherungsweise $N(1 - \cos \Theta)$ zu setzen¹⁾.]

§ 8. Die Funktion $p(k)$ und die Winkelverteilung der Neutronen

Wir betrachten zunächst die Gl. (44) mit (45) von § 7. Diese kann man nach H. L. C. durch ein komplexes Integral darstellen: Sei $\psi(k)$ eine für $\Re k > 0$ analytische Funktion (erste Bedingung), die im Unendlichen wie $\frac{1}{k}$ verschwindet (zweite Bedingung), sonst aber beliebig sein kann, so gilt die Identität ($\Re k_1 > 0$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z-k} \left\{ w(z) \psi(z) - \frac{g(k_1)}{k_1 + z} \right\} = - \left[T \psi(k) - \frac{g(k_1)}{k_1 + k} \right], \quad (51)$$

die man verifiziert, indem man den Integrationsweg über die rechte Halbebene von z hinwegzieht und dabei die Singularitäten des Integranden beachtet. Ist nun $\psi = \psi_1$, d. h. die Lösung von (45) in § 7, so ist für $\Re k > 0$ die linke Seite von (51) wirklich Null. Dann ist nämlich die [] auf der linken Seite von (51) regulär für alle z für $\Re z < 0$ (dritte Bedingung), wovon man sich an Hand von (45) und (44) § 7 leicht überzeugt. Das Integral in (51) wird dann notwendig Null, da man den Integrationsweg über die linke Halbebene hinwegziehen kann, ohne dabei die Singularitäten des Integranden zu treffen. Sind nun für eine Funktion $\psi(k)$ umgekehrt alle drei Bedingungen erfüllt, so folgt aus (51) notwendig,

daß $\psi(k)$ auch die Lösung der Integralgleichung (45) § 7 ist; d. h. $\psi = \psi_1$. Wir setzen zur Berechnung von ψ_1 an:

$$\psi_1(k) = \frac{g(k_1)}{k_1 + k} \frac{h(k)}{w(k)}, \quad (52)$$

wo $h(k)$ dann den folgenden Bedingungen genügt, die bezüglich ψ_1 den vorigen Bedingungen äquivalent sind. 1. $\frac{h(k)}{w(k)}$ analytisch für $\operatorname{Re} k > 0$. 2. $h(k)$ analytisch für $\operatorname{Re} k < 0$ mit $\lim_{k \rightarrow -k_1} h(k) = 1$. 3. $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \text{const.}$ Setzen wir $h(k) = \frac{p(k_1)}{p(-k)}$, wo $p(k)$ die durch (47) § 7 definierte Funktion ist, so sind die drei letzten Bedingungen erfüllt und (52) geht in (46) § 7 über. Der Fall $k = 0$ wird erledigt durch einen Grenzübergang.

Wir schreiben die Definitions-Formel (6) § 7 bzw. § 2 für w in der Form:

$$w(z) = 1 - \sigma \frac{\Re \Im z}{z}. \quad (53)$$

Sei weiter $\log w(z)$ so definiert, daß $\log w(0) = \log(1 - \sigma)$, dann gilt nach H. L. C.

$$\log p(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z-k} \log w(z), \quad (\operatorname{Re} k > 0) \quad (54)$$

für $\operatorname{Re} k > 0$, während für k Werte mit $\operatorname{Re} k \leq 0$ die Funktion $\log p$ durch dasselbe Integral definiert ist, das sich von (54) nur durch den Integrationsweg unterscheidet. In (54) kann nämlich der Integrationsweg nach dem Cauchyschen Satz beliebig deformiert werden, nur darf er dabei keine Singularitäten des Integranden treffen. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung ist dann $p(k)$ durch die so modifizierte Gl. (54) für alle k -Werte analytisch, die rechts von dem Integrationsweg liegen. Die Äquivalenz von (54) mit (47) § 7 beweist man dann mit Hilfe des Residuensatzes. Um $p(k)$ wirklich zu berechnen, müssen wir einige Vorsichtsmaßregeln treffen, um den Cauchyschen Satz anwenden zu können. Dazu betrachten wir die durch die Funktion (53) vermittelte Abbildung der z -Ebene auf die w -Ebene (s. Abb. 1), genau wie in § 3, der linke Teil der Abb. 1 stellt jetzt die linke (aufgeschlitzte) z -Halbebene dar. Bezeichnen wir den Weg von A nach B in der Abb. 1 mit C_{AB} (der entsprechende in der w -Ebene ist $C_{A'B'}$), so können wir das Integral in (54) auffassen als Grenzübergang $A \rightarrow -i\infty$, $B \rightarrow +i\infty$ von $\int_{C_{AB}} \frac{dk}{z-k} \log w(z)$. Diesem Integral wenden wir uns zunächst zu.

Wir setzen zunächst $\operatorname{Re} k > 0$ voraus. Nach einer partiellen Integration hat man:

$$\int \frac{dz}{z-k} \log w(z) = \log(k-z) \log w(z) - \int \frac{dw}{w} \log[k-z(w)], \quad (55)$$

und daher wird, wenn man die von den Integrationsgrenzen herrührenden Terme, die nach dem Grenzübergang $A' \rightarrow 1$, $B' \rightarrow 1$ verschwinden, fortläßt:

$$\int_{C_{AB}} \frac{dz}{z-k} \log w(z) = - \int_{C_{A'B'}} \frac{dw}{w} \log[k-z(w)]. \quad (56)$$

Auf das Integral auf der rechten Seite von (56) können wir den Cauchyschen Integralsatz anwenden, da der Integrand einwertig ist: Wir ersetzen den Integrationsweg $C_{A'B'}$ durch 6 Wege: $C_{A'a'}$, $C_{a'a'}$, $C_{a'\beta'}$, $C_{\beta'\beta'}$, $C_{\beta'\beta'}$ und $C_{\beta'\beta'}$, von

denen der zweite, dritte und vierte nach Ausführung des Grenzüberganges offenbar nichts zum Integral beiträgt. Nach Integration über C'_0 (Residuens.) erhalten wir bis auf unwesentliche Terme:

$$\int_{C_{AB}} \frac{dz}{z-k} \log w(z) = -2\pi i \log(k+k_0) - \left(\int_{C_{A'a'}} + \int_{C_{b'B'}} \right) \frac{dw}{w} \log[k-z(w)].$$

Mit abermaliger Benutzung von (55) wird das:

$$\begin{aligned} &= -2\pi i \log(k+k_0) + [\log(k-z) \log w]_{z=a}^{z=b} + [\log(k-z) \log w]_{z=\alpha}^{z=\beta} \\ &\quad + \left(\int_{C_{a\alpha}} + \int_{C_{\beta b}} \right) \frac{dz}{z-k} \log w(z). \end{aligned}$$

Denken wir an unsere Bestimmung des $\log w$, so sehen wir, daß hier der zweite Term unwesentlich ist, während der dritte im Grenzfall $\alpha \rightarrow -1$, $\beta \rightarrow -1$ den Wert $2\pi i \log(k+1)$ hat. Im letzten Term endlich hat der $\log w$ auf den Wegen $C_{a\alpha}$ und $C_{\beta b}$ Werte, die zueinander konjugiertkomplex sind. Wir erhalten so nach Ausführung des Grenzüberganges $A, B \rightarrow \mp i\infty$

$$\log p(k) = \log \frac{k+1}{k+k_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-\infty} \frac{dz}{z-k} |\arg w(z)|.$$

Von dieser Gleichung subtrahieren wir nun die entsprechende für $\log p(0) = \log \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}$ und führen dann die Integrationsvariable $t = -\frac{1}{z}$ ein. Für $p(k)$ ergibt sich dann:

$$p(k) = \frac{k_0}{\sqrt{1-\sigma}} \frac{1+k}{k_0+k} e^{-\int_0^1 \frac{dt}{t+\frac{1}{k}} \alpha(t)}, \quad (57)$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \left| \arg w\left(-\frac{1}{t}\right) \right| = \frac{1}{\pi} \arccotg \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\sigma t} - \log \frac{1+t}{1-t} \right). \quad (58)$$

Für die numerische Rechnung ist (57) besonders geeignet, denn die Exponentialfunktion ist für $0 \leq k \leq \infty$ ziemlich langsam veränderlich. Sie hat im Fall $\sigma \rightarrow 1$ [$k_0 \rightarrow \sqrt{3(1-\sigma)}$] die Werte 1, 0,841 bzw. 0,577 = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ für $k = 0, 1$, bzw. ∞ (der Wert 0,841 ist durch numerische Integration gewonnen).

Nach unseren früheren Bemerkungen ist (57) gültig für alle k -Werte. Um das Verhalten von $p(k)$ für $-\infty < k \leq -1$ zu bekommen [für diese k -Werte verliert das Integral in (57) seinen Sinn, wenn t nur reelle Werte annimmt], schreiben wir (57) in der dann bequemeren Form:

$$p(k) = \frac{k_0}{\sqrt{1-\sigma}} \frac{(1+k)^{1-\alpha\left(\frac{1}{k}\right)}}{k_0+k} e^{-\int_0^1 dt \frac{\alpha(t)-\alpha\left(\frac{1}{k}\right)}{t+\frac{1}{k}}}. \quad (59)$$

Es ist interessant, das Ergebnis (57) mit der Funktion $p_1(k)$ zu vergleichen, die sich aus der Wickschen Näherung $n=1$ ergibt (das entspricht dem Fermischen

linearen Modell): Ersetzt man in (42) § 7 das Integral durch eine Summe aus zwei Gliedern, die gleich dem Integranden bei $u = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ sind, so erhält man nach leichter Umformung:

$$w_1(k) = \frac{1 - \sigma}{k_0^2} \frac{k_0^2 - k^2}{1 - \frac{k^2}{3}}, \quad \text{wo } k_0 = \sqrt{3(1 - \sigma)}.$$

Wegen der Gültigkeit der zu (47) § 7 analogen Gleichung

$$w_1(k) = \frac{1}{p_1(k) p_1(-k)}$$

wird also:

$$p_1(k) = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \sigma}} \cdot \frac{1 + \frac{k}{\sqrt{3}}}{k_0 + k}. \quad (60)$$

Im Grenzfall $\sigma \rightarrow 1$ wird:

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = 1 + u \sqrt{3}, \quad (61)$$

während nach (57) ist:

$$p\left(\frac{1}{u}\right) = \sqrt{3} (1 + u) e^{-\int_0^1 \frac{dt [\alpha(t)]_{\sigma=1}}{t+u}}. \quad (62)$$

Nach (48) und der ersten Gl. (41) ist das die Winkelverteilung der Neutronen, in unmittelbarer Nähe einer unendlich dicken Absorberplatte. (62) ist der exakte Wert für das angenäherte Winkelverteilungsgesetz von Fermi (Diskussion bei Wick). Das Winkelverteilungsgesetz (41) wurde zuerst von Schuchard u. a.^{*)} berechnet, allerdings in etwas anderer Form als hier. Nach diesen Autoren wäre in unserer Bezeichnungsweise:

$$p(k) = \sqrt{1 + \frac{1}{k}} e^{-\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{(1-\sigma) \cot \theta + \sigma}{1-\sigma \cdot \theta \cot \theta} \arctg\left(\frac{tg \theta}{k}\right)}, \quad \operatorname{Re} k > 0,$$

was, wie sich durch eine etwas umständliche Betrachtung zeigen läßt, äquivalent ist mit unserem Ergebnis (57), wenn man dort nur k -Werte mit $\operatorname{Re} k > 0$ betrachtet. Unsere Darstellung hat u. a. den großen Vorteil, daß in dem besonders wichtigen Grenzfall $\sigma \approx 1$ ($N \gg 1$) im Integral in (57) σ gleich 1 gesetzt werden kann, während das obige Integral von Schuchard u. a. auch dann noch merklich vom genauen Wert σ abhängt. Mit Hilfe von (57) läßt sich auch leicht die Randverteilung der Neutronen berechnen. (Lyons l. c.)

§ 9

Bevor wir zur Lösung der Integralgleichung (48) § 7 schreiten, drücken wir die Funktion $\psi(k)$ mittels:

$$\psi(k) = \frac{q p(0) p(k) \Phi(k)}{k} \quad (63)$$

durch eine neue Funktion $\Phi(k)$ aus. Nach Multiplikation mit k erhalten wir aus (40) § 7:

$$k \int_0^\infty e^{-kx} \varrho(x) dx = \frac{2q}{\sigma} [p(0) p(k) \Phi(k) - 1]. \quad (64)$$

^{*)} Schuchard u. Veling, Phys. Rev. 58, 611—623 (1940).

In den beiden schon bekannten Grenzfällen $y = 0$ und $y = \infty$ wird mit (63):

$$\Phi(k) = \frac{p^{(0)}}{p(k)}, \quad y = 0 \quad (65)$$

$$\Phi(k) = 1, \quad y = \infty. \quad (66)$$

Sei nun J der Integraloperator, der, auf eine beliebige Funktion f angewandt, definiert sei durch:

$$J_1 f(k_1) \equiv \frac{\sigma}{4} \int_1^{\infty} \frac{dk_1}{k_1^2} e^{-yk_1} p(k_1)^2 f(k_1) \quad (67)$$

(der Index 1 soll die Integrationsvariable charakterisieren, statt dessen kann jede andere ganze Zahl stehen), so nimmt mit (63) unsere Integralgleichung (48) § 8 die bequemere Form an:

$$\Phi(k) = 1 + J_1 \left(1 + \frac{k - k_1}{k + k_1} \right) \Phi(k_1). \quad (68)$$

Zu ihrer Lösung wenden wir ein einfaches sukzessives Approximationsverfahren an, indem wir von der für „unendlich dicken“ Absorber gültigen Lösung (66) als nullter Näherung ausgehen, diese in die rechte Seite von (68) einsetzen, dann daraus die erste Näherungslösung bestimmen und so fortfahrend zu immer höheren Näherungen gelangen. Wir erhalten dann nach n Schritten die n -te Näherungslösung, die wir durch folgende Summe aus $n + 1$ Gliedern darstellen wollen:

$$1 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n.$$

Diese Summe konvergiert für $n = \infty$, daher ist die entsprechende unendliche Summe die gesuchte Lösung Φ von (68). Für Φ_n gilt die Rekursionsformel:

$$\Phi_n(k) = J_1 \left(1 + \frac{k - k_1}{k + k_1} \right) \Phi_{n-1}(k_1) \quad n > 0$$

mit $\Phi_0(k) = 1$. Daraus erhält man durch sukzessives Einsetzen bei geeigneter Numerierung der Integrationsvariablen:

$$\Phi_n(k) = J_1 J_2 \dots J_n \left(1 + \frac{k - k_1}{k + k_1} \right) \left(1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \dots \left(\frac{k_{n-1} - k_n}{k_{n-1} + k_n} \right).$$

Multipliziert man hier, von rückwärts beginnend, die einzelnen Klammern aus und beachtet, daß jeder Bruch in den Klammern nur je zwei verschiedene Integrationsvariablen enthält, so sieht man, daß sich Φ_n durch Φ_{n-1} , Φ_{n-2} , ... Φ_0 linear ausdrücken läßt, nämlich:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 \\ \Phi_1 &= A_1 \Phi_0 + F_1 \\ \Phi_2 &= A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_0 + F_2 \\ \Phi_3 &= A_1 \Phi_2 + A_2 \Phi_1 + A_3 \Phi_0 + F_3 \\ &\vdots \\ \Phi_n &= A_1 \Phi_{n-1} + A_2 \Phi_{n-2} + \dots + A_n \Phi_0 + F_n. \end{aligned} \quad (69)$$

Für F_n ergibt sich:

$$F_1(k) = J_1 \frac{k - k_1}{k + k_1}, \quad F_2(k) = J_1 J_2 \frac{k - k_1}{k + k_1} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \dots \quad (70)$$

$$F_n(k) = J_1 J_2 \dots J_n \frac{k - k_1}{k + k_1} \dots \frac{k_{n-1} - k_n}{k_{n-1} + k_n},$$

während

$$A_n = F_n(k = \infty) = -F_n(k = 0) \quad (71)$$

ist. Addieren wir dann die unendlich vielen Gleichungen (69), so erhalten wir mit $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$ eine lineare Gleichung für Φ selbst, die nach Φ aufgelöst ergibt:

$$\Phi(k) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(k)}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n} \quad (72)$$

In der Grenze $k \rightarrow +\infty$ wird:

$$\Phi(\infty) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n} \quad (73)$$

Im Falle $y = 0$ wird nach (63) $\Phi(\infty) = p(0) = \sqrt{N}$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\sqrt{N} - 1}{\sqrt{N} + 1} \quad \text{für } y = 0.$$

Das ist gerade der Wert für die meßbare Albedo β_m (s. Wick). Wir bemerken hier beiläufig, daß für beliebige y die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ das Analogon zu $\beta e^{-\sqrt{3}y}$ im linearen Modell von Fermi ist, also in § 6 dem Ausdruck $\beta(1 - \zeta_a)$ entspricht.

Nach einfacher Rechnung, die ganz analog der ist, die zu (50) § 7 führte, erhält man für die in der Einleitung definierte Funktion $f(y)$ mit Benutzung von (52) und (73):

$$\frac{\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n}{\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n}, \quad \text{wo } N = \frac{1}{1-\sigma}. \quad (74)$$

Die analoge Funktion $f(y)$ ist im linearen Modell von β und damit von N unabhängig, so daß wir im Falle großer N ($\sigma \approx 1$) (74) nur für $N = \infty$ ($\sigma = 1$) auszuwerten brauchen. Weiter vereinfacht sich die numerische Rechnung stark dadurch, daß in $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ für $y \geq 0,5$ alle Summanden bis auf den ersten vernachlässigt werden können. (Eine numerische Abschätzung ergibt, daß das nächste von Null verschiedene Glied $[A_3]_{\sigma=1}$ absolut genommen $< 0,1 \sigma^{-3} y$ ist, während $[A_1]_{\sigma=1} = e^{-y}$.) Wir können für $N \gg 1$ und $y \geq 0,4$ in guter Näherung setzen:

$$f(y) = \frac{1 - [A_1]_{\sigma=1}}{1 + [A_1]_{\sigma=1}}, \quad (75)$$

worin nach (71), (70) und (55):

$$[A_1]_{\sigma=1} = \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{dk}{k^3} e^{-yk} [p(k)]_{\sigma=1}^2. \quad (76)$$

Nun ist aber wegen $k_0 = \sqrt{3(1-\sigma)}$ [s. (11)] für $\sigma \approx 1$:

$$[p(k)]_{\sigma=1}^2 = 3 \frac{(1+k)^2}{k^2} e^{-\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{t+\frac{1}{k}} \operatorname{arccotg} \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{t} - \log \frac{1+t}{1-t} \right)} \quad (77)$$

Hier kann man die Exponentialfunktion um die Stelle $k=1$ entwickeln, und man erhält dafür folgende Darstellung:

$$e^{\dots} = 0,706 \left[1 - 0,217 \left(1 - \frac{1}{k} \right) - 0,115 \left(1 - \frac{1}{k} \right)^2 - 0,065 \left(1 - \frac{1}{k} \right)^3 + \dots \right],$$

wobei die Zahlenkoeffizienten durch numerische Integration gewonnen sind. Das Integral in (76) läßt sich elementar auswerten. Mit den Abkürzungen:

$$h_0(y) = \int_0^1 du e^{-\frac{y}{u}} = e^{-y} - y \int_y^\infty \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta} \quad (78)$$

$$n > 0: \quad h_n(y) = \frac{1}{n+1} [e^{-y} - y h_{n-1}(y)]$$

bekommen wir dann aus (76) mit (77):

$$[A_1]_{\sigma=1} = \frac{3}{2} 0,706 [(h_0 + 2h_1 + h_2) - 0,217(h_0 + h_1 - h_2 - h_3) - 0,155(h_0 - 2h_2 + h_4) - 0,063(h_0 - h_1 - 2h_2 + 2h_3 + h_4 - h_5) + \dots] \quad (79)$$

Dies in (75) eingesetzt ergibt für $y \gtrsim 0,4$ die gesuchte Funktion $f(y)$ in guter Näherung.

Die folgende Abb. 3 zeigt die Funktion $f(y)$ für $\sigma=1$. Im Intervall $0,4 < y < \infty$ wurde der Ausdruck (79) benutzt. Für kleinere y konnte in guter Näherung

$f(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} y$ gesetzt werden (s. § 5).

Im Falle $\sigma=0$ ($N=1$) ergibt sich durch Ausführung eines einfachen Grenzüberganges:

$$\sigma=1: \quad f(y) = \frac{1 - h_0(y)}{1 + h_0(y)}, \quad (80)$$

was natürlich direkt aus (63) (mit $\sigma=0$) abgeleitet werden kann.

Die gestrichelte Kurve II stellt die nach kleinen y -Werten fortgesetzte „erste Näherung“ der Lösung $f(y)$ dar. (Entsprechendes gilt für die gestrichelte Kurve I.) Man beachte aber, daß die in Abb. 3 dargestellte Funktion $f(y)$ für kleine y -Werte noch von der Dicke des Indikators abhängen wird, denn im gegebenen Falle muß noch überprüft werden, ob die Gl. (29) aus § 5 genügend genau erfüllt ist.

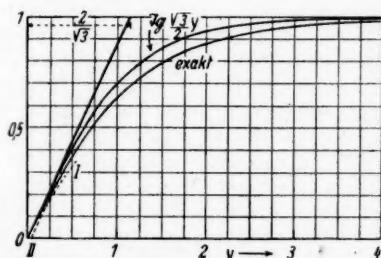


Abb. 3. Die „Albedo-Funktion“ $f(y)$ [s. Gl. (34)] in Abhängigkeit von der Absorberdicke $y = \mu d$

Berlin, II. Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 15. Juni 1950.)

Zur Theorie des Schrot- und Johnson-Effektes

Von H. Dänzer

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Der Verstärkungsgrad von Nieder- und Hochfrequenzverstärkern wird bekanntlich durch zwei Effekte begrenzt, die als Schrot-Effekt und Johnson-Effekt bekannt sind. Für beide Effekte liegen experimentelle und theoretische Bearbeitungen vor. Im Folgenden wird eine einheitliche mathematische Behandlung beider Schwankungsphänomene gegeben, die, wie der Verfasser glaubt, gewisse formale Mängel der ursprünglichen Theorie beseitigt und insofern von Interesse sein könnte.

Beim Schrot-Effekt handelt es sich bekanntlich darum, daß die Elektronenemission aus Glühfäden dem Poissonschen Schwankungsgesetz der Wahrscheinlichkeit gehorcht. Die Elementarladung e des Elektrons geht in die Theorie des Schrot-Effektes als bestimmende und charakteristische Größe ein und kann umgekehrt aus den Messungen der durch den Schrot-Effekt bewirkten Stromschwankungen experimentell ermittelt werden. Der Johnson-Effekt besteht andererseits im Auftreten von Spannungsschwankungen an den Klemmen eines Ohmschen Widerstandes, die sich aus der statistischen Verteilung der Elektrizität innerhalb des Leiters ergeben. Dementsprechend ist in diesem Schwankungsphänomen die Boltzmann-Konstante k die wesentliche und fundamentale Konstante; die Elementarladung spielt beim Johnson-Effekt keine Rolle. Die im Folgenden gegebene mathematische Methodik geht dementsprechend beim Schrot-Effekt von den Stromschwankungen im Anodenkreis einer Elektronenröhre und beim Johnson-Effekt von den Spannungsschwankungen an den Klemmen eines Widerstandes aus. Liegt im Fall des Schrot-Effektes ein komplexer Widerstand $\Re(\omega)$ im Anodenkreis der Elektronenröhre, so treten infolge der Stromschwankungen an dessen Klemmen Spannungsschwankungen auf, die wir aus dem Ohmschen Gesetz für Wechselströme berechnen können. Beim Johnson-Effekt berechnen wir aus den Wechselstromgesetzen die Stromschwankungen, die ein als Spannungsquelle betrachteter Ohmscher Widerstand W in einem Stromkreis hervorruft, der aus W und einem komplexen Widerstand $\Re(\omega)$ gebildet wird. Dabei sei angenommen, daß $\Re(\omega)$ nur Induktivitäten und Kapazitäten und keinen Ohmschen Widerstand enthält.

Die schwankenden Strom- bzw. Spannungswerte betrachten wir aus einzelnen Impulsen bestehend. Jeder Strom- bzw. Spannungsimpuls kann mit Hilfe des Fourierschen Integraltheorems in ein Spektrum ungedämpfter Frequenzen zer-

legt werden. Die Wirkung der einzelnen Frequenzkomponenten auf die im Kreis liegenden komplexen Widerstände kann aus den Wechselstromgesetzen ermittelt werden.

I. Der Schrot-Effekt

Wir wenden uns zunächst der Betrachtung des Schrot-Effektes zu. In einem kurzen Zeitabschnitt, dessen Länge wir später begrenzen werden, mögen aus dem Glühfaden im Zustand der Sättigungsemission m_k Elektronen übergegangen sein, so daß der mittlere Strom innerhalb dieses durch den Index k charakterisierten Zeitelementes gegeben ist durch

$$\bar{I}_k = \frac{m_k e}{\tau} \quad (1)$$

Unter e ist die Elementarladung verstanden. In gleich großen Zeitintervallen τ ist die übergegangene Elektronenzahl nicht immer die gleiche, so daß der Anodenstrom statistische Schwankungen um einen Mittelwert ausführt. Bezeichnen wir den Mittelwert aller Elektronenzahlen innerhalb gleicher Zeitabschnitte τ mit n :

$$\overline{m_k} = n, \quad (2)$$

so ist der unveränderliche Gleichstromanteil im Anodenstrom

$$I = \frac{n e}{\tau} \quad (3)$$

Wir ziehen diesen Gleichstrommittelwert von dem schwankenden Anodenstrom ab und interessieren uns im Folgenden lediglich für die Stromschwankungen δI um den Mittelwert I . Die Schwankungen δI_k in den durch den Index k numerierten gleich großen Zeitabschnitten können positiv und negativ sein. Unter der Schwankung s_k der Elektronenzahl verstehen wir

$$s = m - n. \quad (4)$$

Nach den Schwankungsgesetzen gilt für das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{s_k^2}$:

$$\overline{s_k^2} = n. \quad (4a)$$

Wir können den Stromimpuls δI_k im Zeitelement τ unserem Programm gemäß in ein Fourier-Integral auflösen, setzen also:

$$\delta I_k(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega T} d\omega. \quad (5)$$

$A(\omega)$ ist die Amplitude der durch $e^{i\omega T}$ dargestellten Sinuswelle, die am Aufbau des Stromimpulses beteiligt ist. Durch Auflösen des Fourier-Integrals erhält man für die Amplitude $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta I_k(T) e^{-i\omega T} dT. \quad (6)$$

Bei der Auswertung des Integrals beachten wir, daß $\delta I_k(T)$ lediglich einen Stromimpuls in dem durch den Index k numerierten Zeitabschnitt τ darstellt, den wir für sich allein betrachten und dem freilich noch andere Stromimpulse vorangehen und nachfolgen. Setzen wir die Zeit T zu Beginn des Stromimpulses gleich

Null, so geht (6) über in:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} \delta I_k(T) e^{-i\omega T} dT. \quad (7)$$

Der betrachtete Stromimpuls ist nämlich nur innerhalb des Zeitabschnittes τ von Null verschieden.

Durchsetzt der Anodenstrom $\delta I_k(T)$ einen komplexen Anodenwiderstand $\Re(\omega)$, so tritt an dessen Klemmen ein Spannungsverlauf auf, den wir aus dem Ohmschen Gesetz für Wechselströme unter Benutzung der Integraldarstellung (5) für den Strom berechnen können. Da auf jede einzelne Frequenzkomponente das Ohmsche Gesetz für Wechselströme angewandt werden kann, ergibt sich so der Spannungsverlauf $\delta U_k(T)$, der von dem Stromimpuls $\delta I_k(T)$ ausgelöst wird [mit $\Re(-\omega) = \Re^*(\omega)$, vgl. Anhang]

$$\delta U_k(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \Re(\omega) e^{i\omega T} d\omega. \quad (8)$$

Als einfaches Beispiel sei der komplexe Widerstand $\Re(\omega)$ eine Parallelschaltung eines Ohmschen Widerstandes mit einem Kondensator C . Der Spannungsverlauf $\delta U_k(T)$ kann in diesem einfachen Fall sehr leicht ermittelt werden: Die s Elektronen laden den Kondensator mit der Kapazität C zunächst auf die Spannung

$$\delta U = \frac{s_k e}{C}$$

auf, der sich dann über den Parallelwiderstand entlädt. Der Spannungsverlauf an den Klemmen des komplexen Widerstandes ist dann eine abklingende Exponentialfunktion. Auch im Fall allgemeinerer komplexer Wechselstromwiderstände in Anodenkreis bildet die Anodenkapazität der Elektronenröhre einen Parallelkondensator, der für extrem hohe Frequenzen schließlich als Kurzschluß wirkt. Der komplexe Wechselstromwiderstand $\Re(\omega)$ hat also in jedem Fall die Eigenschaft, daß sein Absolutbetrag für hinreichend hohe Frequenzen Ω gegen Null konvergiert.

Bei der Auswertung des Integrals (6) brauchen wir also nach (8) nur Frequenzen ω in Betracht zu ziehen, für die $\omega < \Omega$ ist. Für solche Frequenzen kann in (7) die Exponentialfunktion durch 1 ersetzt werden, wenn τ so klein gewählt wird, daß¹⁾

$$\Omega \tau \ll 1 \quad (9)$$

ist. Dann wird

$$A(\omega) = \frac{s_k e}{\sqrt{2\pi}}. \quad (10)$$

Dabei wurde gesetzt:

$$s_k e = \int_0^{\tau} \delta I_k dT. \quad (11)$$

Das Resultat (10) gilt nach unseren Voraussetzungen nur für Frequenzen im Gebiet

$$-\Omega < \omega < +\Omega. \quad (12)$$

¹⁾ Dabei sei angenommen, daß der Emissionsstrom aus dem Glühfaden so stark ist, daß in dem durch (9) festgelegten Zeitintervall τ für eine Statistik noch hinreichend viele Elektronen austreten.

Durch Einsetzen von (10) in (8) folgt dann als Darstellung des Spannungsverlaufs:

$$\delta U_k(T) = \frac{s_k e}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \Re(\omega) e^{i\omega T} d\omega + \dots \quad (13)$$

Die Punkte stellen den Ω -Anteil des Fourier-Integrales (8) außerhalb des Frequenzgebietes (12) dar. Da wir nach obigem die Schranke Ω so gewählt haben, daß für $|\omega| > \Omega$ $\Re(\omega)$ verschwindet, so kann der durch die Punkte angedeutete Anteil des Fourier-Integrals wegleiben und im Integral können die Grenzen $-\Omega$ und $+\Omega$ durch $-\infty$ und $+\infty$ ersetzt werden. So ergibt sich schließlich als allgemeine Darstellung des Spannungsverlaufes, der durch den Übergang der s_k Elektronen bewirkt wird:

$$\delta U_k(T) = \frac{s_k e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re(\omega) e^{i\omega T} d\omega. \quad (14)$$

Arbeitet der komplexe Widerstand $\Re(\omega)$ auf einen Verstärker mit der komplexen Spannungsverstärkung $\mathfrak{G}(\omega)$, wie das in allen experimentellen Anordnungen zur Messung des Schrot-Effektes der Fall ist, so tritt bei der Berechnung der Ausgangsspannung $V(T)$ des Verstärkers im letzten Integral der komplexe Verstärkungsfaktor $\mathfrak{G}(\omega)$ ein, und man erhält für den Spannungsverlauf am Ausgang des Verstärkers, der durch den Übergang von s_k Elektronen auf der Eingangsseite erregt wird, die Darstellung:

$$V_k(T) = \frac{s_k e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re(\omega) \mathfrak{G}(\omega) e^{i\omega T} d\omega. \quad (15)$$

Hier muß im Gebiet negativer Frequenzen gesetzt werden

$$\Re(-\omega) = \Re^*(\omega), \quad \mathfrak{G}(-\omega) = \mathfrak{G}^*(\omega).$$

$V_k(T)$ ist dann eine reelle Funktion der Zeit (Anhang).

Die Spannungsschwankungen am Ende des Verstärkers sind als Rauscheffekt allgemein bekannt. In Abb. 1 ist der Verlauf des schwankenden Anodenstroms schematisch dargestellt. Die aufeinanderfolgenden Zeitabschnitte τ sind durch den Index k numeriert, $T = k\tau$ bedeutet hier den Zeitabstand eines bestimmten Stromimpulses vom Beobachtungszeitpunkt t , die Numerierung k läuft von t aus in die Vergangenheit zurück. Die Spannung $V(t)$, die am Verstärkerausgang im Beobachtungszeitpunkt t beobachtet wird, kann als Überlagerung der von den einzelnen Zeitabschnitten τ herrührenden Wirkungen aufgefaßt werden. Wir können also setzen:

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(k\tau), \quad (16)$$

wobei im Sinn von Abb. 1 die Zeit T durch $k\tau$ ersetzt ist und über k zu summieren ist. Setzt man für $V_k(T)$ die Integraldarstellung (15) ein, so ergibt sich durch Ein-



Abb. 1. Regellose Schwankung des Stromes oder der Spannung

führung der Zeitfunktion

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re(\omega) \Im(\omega) e^{i\omega T} d\omega \quad (17)$$

$$V(t) = e \sum_{k=0}^{\infty} s_k \varphi(k\tau). \quad (18)$$

Damit ist der Momentanwert der Ausgangsschwelspannung in einem bestimmten Zeitpunkt t gefunden. Er ist festgelegt durch die Schwankungen s_k der in den einzelnen Zeitabschnitten τ übergegangenen Elektronenzahlen.

Denken wir uns in Abb. 1 den Zeitpunkt t durch einen (weiter rechts liegenden) späteren Zeitpunkt t_1 ersetzt, so sind in der Summe (18) auch die im Zeitintervall $t_1 - t$ aufgetretenen Schwankungen s_k mit zu berücksichtigen. Die Summation über k läuft dann im Gegensatz zu Abb. 1 nicht von t ab in die Vergangenheit, sondern von t_1 ab. Die Berechnung der Summe liefert dann einen anderen Spannungsmomentanwert $V(t_1)$. Beobachtet man die Spannung $V(t_1)$ über einen längeren Zeitabschnitt, so schwankt sie. Ein Effektivvoltmeter (z. B. ein elektrostatisches Voltmeter) zeigt dann den quadratischen Mittelwert der schwankenden Spannung an. Wie wir an späterer Stelle zeigen werden, folgt so nach (18) für den quadratischen Mittelwert der Verstärkerausgangsspannung:

$$\overline{V(t)^2} = \frac{e^2 s_k^2}{\pi \tau} \int_0^{\infty} |\Re(\omega)|^2 |\Im(\omega)|^2 d\omega. \quad (19)$$

Nach (4a) und 3 ist hier

$$\frac{e^2 s_k^2}{\tau} = e I.$$

Der Mittelwert I des Anodenstromes kann mit einem beliebigen Gleichstrominstrument ermittelt werden. Aus (19) wird ersichtlich, wie aus der Messung des quadratischen Mittelwertes des Rauscheffektes die Elementarladung e ermittelt werden kann. Notwendig ist dabei die Kenntnis der „Impedanz“ $|\Re(\omega)|$ und des Verstärkungsfaktors $|\Im(\omega)|$. Die Frequenzcharakteristik $|\Im(\omega)|$ des Verstärkers muß also bekannt sein, damit das Integral durch numerische Integration ermittelt werden kann. (19) ist identisch mit der zuerst von Schottky²⁾ abgeleiteten Formel.

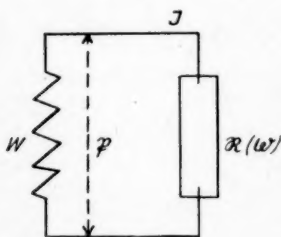


Abb. 2. Schema des Johnson-Effektes: Der Widerstand W „arbeitet“ auf einen Blindwiderstand $\Re(\omega)$, an dessen Klemmen die Klemmenspannung \Im auftritt

II. Der Johnson-Effekt

Die mathematische Behandlung des Johnson-Effektes erfolgt völlig analog der oben durchgeführten Betrachtung unter Zugrundelegung des Schaltbildes Abb. 2, in der $\Re(\omega)$ eine Schaltkombination von Induktivitäten und Kapazitäten ohne Ohmschen Widerstand darstellen möge. An Stelle der Stromimpulse der vorangegangenen Betrachtung ziehen wir hier die Impulse der elektromotorischen Kraft heran, die im Ohmschen Widerstand wirksam sind und in ihrer Gesamtheit den Johnson-Effekt darstellen. Auch hier greifen wir einen einzelnen

²⁾ W. Schottky, Ann. Physik 57, 571 (1918).

Spannungsimpuls heraus und berechnen den Stromverlauf, den dieser Spannungsimpuls im Stromkreis Abb. 2 hervorruft. In Abb. 1 bedeuten die Ordinaten jetzt Spannungen an Stelle der früher betrachteten Ströme. Dementsprechend tritt jetzt an Stelle von (5) die Fourierreuelegung eines einzelnen Impulses δE_k der elektromotorischen Kraft E :

$$\delta E_k(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega T} d\omega \quad (20)$$

und es ergibt sich an Stelle von (6):

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta E_k(T) e^{-i\omega T} dT. \quad (21)$$

Unter denselben Voraussetzungen, die zu (10) führten, kann gesetzt werden:

$$A(\omega) = \frac{\sigma_k}{\sqrt{2\pi}}. \quad (22)$$

σ_k ist analog zu (9) definiert

$$\sigma_k = \int_0^T \delta E_k dT. \quad (23)$$

Die Berechnung des Stromverlaufes $\delta I_k(T)$ erfolgt dann über das Ohmsche Gesetz für Wechselströme, angewandt auf die einzelnen Frequenzkomponenten und unter Beachtung der Bedeutung von E als elektromotorische Kraft, die in dem „inneren Widerstand“ W wirksam ist:

$$\delta I_k(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\omega)}{W + \Re(\omega)} e^{i\omega T} d\omega. \quad (24)$$

Die Klemmenspannung \mathfrak{P}_k (vgl. Abb. 2), die als Eingangsspannung auf einen Verstärker mit dem komplexen Verstärkungsverhältnis $\mathfrak{G}(\omega)$ wirken möge, ergibt sich dann durch Multiplikation des Integranden mit $\Re(\omega)$:

$$\mathfrak{P}_k(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\omega) \Re(\omega)}{W + \Re(\omega)} e^{i\omega T} d\omega. \quad (25)$$

Genau wie beim Übergang von (14) auf (15) muß dann noch mit dem komplexen Verstärkungsverhältnis $\mathfrak{G}(\omega)$ multipliziert werden, wenn nach dem Spannungsverlauf am Verstärkerausgang gefragt wird, der von einem einzelnen Impuls der elektromotorischen Kraft im Widerstand W herrührt. Setzt man außerdem für $A(\omega)$ seinen Wert aus (22) ein, so ergibt sich schließlich für die Spannung am Verstärkerausgang:

$$V_k(T) = \frac{\sigma_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Re(\omega) \mathfrak{G}(\omega)}{W + \Re(\omega)} e^{i\omega T} d\omega. \quad (26)$$

In Sinn der (für Spannungen umgedeuteten) Abb. 1 wird die Momentanspannung am Verstärkerausgang zur Zeit t durch Überlagerung der von den einzelnen Spannungsimpulsen herrührenden Spannungsverläufe erhalten. Es gilt dann wieder Gl. (16), aus der durch Einsetzen des Ergebnisses (26) für die Momentan-

spannung $V(t)$ am Verstärkerausgang folgt:

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \psi(k\tau). \quad (27)$$

Die Funktion $\psi(T)$ ist hier definiert durch

$$\psi(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Re(\omega) \mathfrak{G}(\omega)}{W + \Re(\omega)} e^{i\omega T} d\omega. \quad (28)$$

Die Bildung des mittleren Spannungsquadrates erfolgt ähnlich wie beim Übergang zu (19), es ist hier wieder zu beachten, daß die Schwankungen der elektromotorischen Kraft regellos zwischen positiven und negativen Werten erfolgen, so daß der Mittelwert $\bar{\sigma}_k$ verschwindet. So folgt leicht, wie wir im Anhang beweisen werden, als Endergebnis für das mittlere Spannungsquadrat am Verstärkerausgang, in vollkommener Analogie zu (19)

$$\overline{V(t)^2} = \frac{\bar{\sigma}_k^2}{\pi\tau} \int_0^{\infty} \left| \frac{\Re(\omega) \mathfrak{G}(\omega)}{W + \Re(\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (29)$$

σ_k ist dabei durch die Definition (23) gegeben und enthält lediglich die Qualitäten des Widerstandes W , in dem die elektromotorische Kraft E wirksam ist.

Wir werden jetzt beweisen, daß $\bar{\sigma}_k^2$ durch die Boltzmann-Konstante und die absolute Temperatur festgelegt ist. Zum Beweis setzen wir in (29) $\mathfrak{G}(\omega) = 1$ und $\Re(\omega) = \frac{1}{i\omega C}$, d. h. wir nehmen an, daß der Widerstand w auf den Kondensator mit der Kapazität C „arbeitet“. In diesem Fall ist nach allgemeinen Überlegungen der statistischen Thermodynamik, wie sie in der Anwendung auf elektrische Kreise zuerst von Einstein formuliert worden sind, das mittlere Spannungsquadrat an den Klemmen des Kondensators bekannt:

$$\frac{1}{2} C \overline{V^2(t)} = \frac{1}{2} k T. \quad (30)$$

T bedeutet hier die absolute Temperatur. Die linke Seite von (30) stellt den mittleren elektrischen Energiegehalt des Kondensators dar. Bildet der Kondensator mit einer Induktivität einen Schwingkreis, so lassen sich nämlich auf diesen Schwingkreis die thermodynamischen Gesetze, die für eindimensionale Oszillatoren gelten, anwenden. In diesem Fall ist die mittlere elektrische Energie im Kondensator (ebenso wie die mittlere magnetische Energie in der Induktivität) durch die thermische Energie pro Freiheitsgrad, also durch $\frac{1}{2} k T$ gegeben. Unter den gemachten Voraussetzungen läßt sich das Integral (29) leicht auswerten. Setzt man für die linke Seite aus (30) ein, so ergibt sich der gesuchte quadratische Mittelwert $\bar{\sigma}_k^2$. Die Ausrechnung des Integrals liefert:

$$\bar{\sigma}_k^2 = 2 W k T \cdot \tau. \quad (31)$$

Durch Einsetzen in (29) ergibt sich also ganz allgemein:

$$\overline{V^2(t)} = 4 W k T \int_0^{\infty} \left| \frac{\Re(\omega) \mathfrak{G}(\omega)}{W + \Re(\omega)} \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (32)$$

Als praktisch wichtige Anwendung dieser Gleichung betrachten wir die Schaltkombination Abb. 3, die für die Eingangsseite eines Verstärkers typisch ist. Der Kondensator C möge etwa durch die Gitterkapazität der Eingangsstufe des Verstärkers dargestellt werden. W bedeutet den Gitterableitwiderstand; L stellt die Induktivität der Verbindungsdrähte dar, die den Gitterableitwiderstand mit der Gitterkapazität verbinden. Der gesamte komplexe Wechselstromwiderstand, auf den der Widerstand W arbeitet, ist also gegeben durch

$$\Re(\omega) = i \omega L + \frac{1}{i \omega C}. \quad (33)$$

In (32) bedeutet dann V die Spannung an den Klemmen des Widerstandes W . Fragen wir, was in unserem praktischen Fall wichtiger ist, nach der Spannung an den Klemmen des Kondensators C (also nach der Gitterspannung an der Eingangsstufe), so muß im Zähler des Integranden von (32) im Sinn des Übergangs von (24) auf (25) $\Re(\omega)$ durch $\frac{1}{i \omega C}$ ersetzt werden. Für die Spannung am Kondensator ergibt sich also:

$$\overline{V_C^2(t)} = 4 W k T \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\omega^2 C^2} |\mathcal{G}(\omega)|^2}{W^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (34)$$

Führen wir die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Schwingkreises ein:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (35)$$

so kann gesetzt werden:

$$\overline{V_C^2(t)} = 4 W k T \int_0^\infty \frac{|\mathcal{G}(\omega)|^2}{\omega^2 W^2 C^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (36)$$

Da die Induktivität der Zuleitungen sehr klein ist, so ist im allgemeinen für alle Frequenzen, für die der Verstärkungsfaktor $\mathcal{G}(\omega)$ merklich von Null verschieden ist,

$$\omega \ll \omega_0. \quad (37)$$

Dann wird einfach:

$$\overline{V_C^2(t)} = 4 W k T \int_0^\infty \frac{|\mathcal{G}(\omega)|^2}{1 + \omega^2 W^2 C^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (38)$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich für nicht zu große Widerstände W , die im Verstärkungsbereich des Verstärkers der Bedingung

$$\omega W C \ll 1 \quad (39)$$

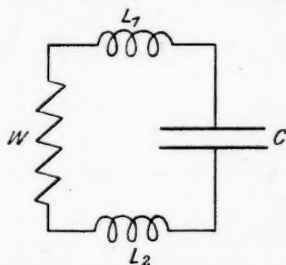


Abb. 3. $L = L_1 + L_2$ ist die Gesamtinduktivität des Schwingkreises, in dem infolge des Johnson-Effektes unregelmäßige Stromschwankungen auftreten

genügen. Ist diese weitere Bedingung ebenfalls erfüllt, dann folgt aus (38):

$$\overline{V_C^2(t)} = 4 W k T \int_0^\infty |\mathcal{G}(\omega)|^2 d\nu. \quad (40)$$

(40) ist als Nyquistsche Formel³⁾ bekannt; sie gilt unter den einschränkenden Voraussetzungen (37) und (39).

Setzt man in (36) $\mathcal{G}(\omega) = 1$, so muß (36) auf (30) zurückführen, was in der Tat durch direkte Ausrechnungen bestätigt werden kann: Man substituiere

$$\begin{aligned} W \omega C &= x, \\ W \omega_0 C &= x_0 \end{aligned} \quad (41)$$

und erhält dann aus (36)

$$\overline{V_C^2(t)} = \frac{2 k T}{\pi C} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \left(1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right)^2}. \quad (42)$$

Beachtet man, daß

$$\int_0^\infty \frac{du}{\alpha^2 u^2 + (1 - u^2)^2} = \frac{\pi}{2 \alpha},$$

so folgt Gl. (30), wie zu erwarten war.

Anhang

Die Einführung komplexer Widerstände $\Re(\omega)$ in die Fourier-Integrale (5) und (20) kann näher begründet werden: Wir ersetzen dabei der Einfachheit halber das Integral (5) durch eine Fourier-Reihe

$$I = \sum_1^\infty (\alpha_n \cos n \omega t + \beta_n \sin n \omega t). \quad (I)$$

Mit der Definition

$$\gamma_n = \alpha_n - i \beta_n \quad (II)$$

ergibt sich hieraus

$$I = R \left(\sum_1^\infty \gamma_n e^{i n \omega t} \right). \quad (III)$$

Für die Klemmenspannung U an dem vom Wechselstrom I durchflossenen komplexen Widerstand $\Re(\omega)$ folgt dann

$$U = R \left(\sum_1^\infty \Re(n \omega) \gamma_n e^{i n \omega t} \right). \quad (IV)$$

Das Symbol R in (III) und (IV) bedeutet: Bildung des Realteils. (Der Übergang zu konjugiert-komplexen Ausdrücken wird im folgenden durch einen * gekennzeichnet)

³⁾ H. Nyquist, Physic. Rev. **32**, 110 (1928).

zeichnet). Für γ_n erhält man nach (I) und (II)

$$(40) \quad \gamma_n = \frac{2}{T} \int_0^T I e^{-in\omega t} dt; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (V)$$

Wir definieren dementsprechend, unter Einführung negativer Frequenzen

$$\gamma_n(-\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T I e^{+in\omega t} dt = \gamma_n^*(\omega) \quad (VI)$$

und erhalten

$$(41) \quad \sum_1^\infty \gamma_n(-\omega) e^{-in\omega t} = \sum_1^\infty \gamma_n^* e^{in\omega t}. \quad (VII)$$

Dann folgen nach (III) u. (IV) die Fourierdarstellungen des Stromes und der Spannung

$$(42) \quad I(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_1^\infty + \sum_1^\infty^* \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\omega t} \quad (VIII)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_1^\infty + \sum_1^\infty^* \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \Re(\omega) e^{in\omega t}. \quad (IX)$$

In (IX) muß im Sinne von (VII) auf Grund von (IV) gesetzt werden

$$\Re(-\omega) = \Re^*(\omega). \quad (X)$$

Diese Definitionsgleichung für den komplexen Widerstand im Bereich negativer Frequenzen ist also die Voraussetzung für die Richtigkeit der Darstellung (IX), in der nach (VI) auch gilt:

$$A_n(-\omega) = A_n^*(\omega).$$

In (VIII) und (IX) sind $I(t)$ und $U(t)$ gewöhnliche reelle Funktionen der Zeit.

Die Bildung der quadratischen Mittelwerte von (18), (27) läßt sich folgendermaßen durchführen: Durch Multiplikation mit der konjugiert-komplexen Gleichung ergibt sich nämlich zunächst aus (27) [die Funktion $V(t)$ in Analogie (IX) reell]

$$V^2(t) = \sum_k \sum_{k'} \sigma_k \sigma_{k'} \psi(k\tau) \psi^*(k'\tau). \quad (XI)$$

Die konjugiert-komplexen Größen sind hier wie oben durch einen Stern gekennzeichnet. Bei der nun auszuführenden zeitlichen Mittelwertbildung betrachte man Abb. 1 und denke sich die Zeit t variabel. Wie schon an früherer Stelle bemerkt wurde, läuft der Index k von 0 bis ∞ jedesmal von t ab in die Vergangenheit, so daß bei Variation der Zeit t dieselben Zeitabschnitte τ jedesmal mit andern Indices k zu versehen sind. Die zeitliche Mittelung von $V^2(t)$ kann also so vorgenommen werden, daß in den einzelnen Gliedern der Doppelsummen die Größen $\sigma_k, \sigma_{k'}$ bei festem k, k' variiert werden, wobei die Definition (23) für σ_k heranzuziehen ist. Wegen der völligen Regellosigkeit der Schwankungen sind die Mittelwerte

aller Doppelsummenglieder, für die $k \neq k'$ ist, gleich Null, und es verbleibt die Berechnung der Summenglieder mit $k = k'$ ⁴⁾. Nun ist aber

$$\overline{\sum_k \sigma_k^2 \psi(k\tau) \psi(k\tau)^*} = \overline{\sigma_k^2} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty |\psi(T)|^2 dT. \quad (\text{XII})$$

Erinnert man sich an die Definition 28 der Funktion $\psi(T)$ und bedenkt, daß nach einem Satz über Fourierintegrale gesetzt werden kann

$$\int_0^T |\psi(T)|^2 dT = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\Re(\omega) \mathfrak{G}(\omega)}{W + \Re(\omega)} \right| d\omega,$$

so ergibt sich die Richtigkeit von (29), wenn berücksichtigt wird, daß nach (X) zu setzen ist:

$$\Re(-\omega) = \Re^*(\omega), \quad \mathfrak{G}(-\omega) = \mathfrak{G}^*(\omega).$$

Ersetzt man in (XII) σ_k durch $s_k e$ und ψ durch φ (vgl. (17)), so folgt ganz analog das Ergebnis (19) für den Schroteffekt.

⁴⁾ Ähnlich wie bei R. Becker, Theorie der Elektrizität, Bd. II.

Mainz a. Rh., Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 2. September 1950.)

Reflexionseffekte bei der nichtlinearen Theorie der Supraleitung

Von Walter Heywang

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Untersucht werden Oberschwingungseffekte, die nach der Koppeschen Theorie bei Reflexion einer elektrischen Welle an einem Supraleiter auftreten. Es wird gezeigt, daß diese Effekte durch einen überlagerten Gleichstrom wesentlich modifiziert und in den Bereich des Meßbaren gebracht werden können.

§ 1. Einleitung

In der Heisenbergschen Theorie der Supraleitung wird der Maximalstrom I_M nach einer Abschätzung Koppes vor allem unterhalb der halben Sprungtemperatur T_S vergleichbar mit dem Strom, dessen Eigenmagnetfeld die Supraleitung aufhebt. Dieser Umstand hat H. Koppe¹⁾ veranlaßt, die linearen Londonschen Gleichungen phänomenologisch durch Multiplikation der Supraleitungskonstanten λ mit einer stromabhängigen Funktion $\varphi\left(\frac{I_S}{I_M}\right)$ zu einer nichtlinearen Theorie auszubauen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\lambda \varphi \left(\frac{I_S}{I_M} \right) \mathfrak{J}_S \right] = \mathfrak{E}, \quad (1,1)$$

$$c \operatorname{rot} \left[\lambda \varphi \left(\frac{I_S}{I_M} \right) \mathfrak{J}_S \right] = - \mathfrak{B}. \quad (1,2)$$

Dabei muß φ folgenden Bedingungen genügen:

1. $\varphi \rightarrow 1$ für $I_S \rightarrow 0$, damit für kleine Ströme (1, 1/2) mit den linearen Londonschen Gleichungen übereinstimmt;
2. $\varphi \rightarrow \infty$ für $I_S \rightarrow I_M$ entsprechend dem Sättigungseffekt;
3. φ muß eine gerade Funktion sein.

Eine experimentelle Bestätigung dieser nichtlinearen Theorie wäre natürlich zugleich eine starke Stütze für den Heisenbergschen Mechanismus der Supraleitung. Fragt man sich nach experimentellen Prüfungsmöglichkeiten, so bieten sich vor allem zwei Effekte an:

1. Die Änderung der Stromverteilung gegenüber der linearen Theorie,
2. Die Ungültigkeit des Superpositionsgesetzes, was bei Wechselfeldern zu Oberschwingungen Anlaß geben muß.

Den ersten Effekt hat H. Koppe l. c. für Gleichstrom näher durchgerechnet. Die quantitative Prüfung dieser Ergebnisse dürfte jedoch wegen der Struktur-

¹⁾ H. Koppe, Z. Naturforsch. 2a, 185 (1947); Erg. d. exakt. Naturw. 23, 283 (1950), (hinfort mit E zitiert).

empfindlichkeit der Stromverteilung und ihrer Abhängigkeit vom Abkühlungsvorgang (Kurzschluß durch vorzeitig unterkühlte Bereiche) mit Schwierigkeiten verknüpft sein. Diese Schwierigkeiten entfallen bei der Prüfung des Superpositionsgesetzes; bereits der qualitative Nachweis von Oberschwingungen spräche zugunsten der nichtlinearen Theorie. Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher, die Stärke der zu erwartenden Oberschwingungen zu ermitteln, wenn eine monochromatische elektrische Welle an einem Supraleiter reflektiert wird. Ein wesentlicher Gesichtspunkt bei unseren Untersuchungen ist der, daß die ausgelösten Oberschwingungen durch einen Gleichstrom, der dem Supraleiter überlagert wird, erheblich verstärkt und in willkürlicher Weise gesteuert werden können; erst dadurch wird es möglich werden, die im Supraleiter neu entstehenden Oberschwingungen einwandfrei von jenen zu trennen, die naturgemäß immer in der Primärwelle enthalten sind.

§ 2. Ausgangsgleichungen

A) Differentialgleichungen

Im Supraleiter, dessen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität 1 sei, gelten neben (1, 1/2) die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}}, \quad (2,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} (\mathfrak{E} + \mathfrak{I}_S + \mathfrak{I}_0), \quad (2,2)$$

$$\mathfrak{I}_0 = \sigma \mathfrak{E}. \quad (2,3)$$

Vom Vakuum falle auf den den Halbraum $z > 0$ erfüllenden Supraleiter eine in der x -Richtung linear polarisierte Welle der Frequenz ω senkrecht auf. Auch der überlagerte Gleichstrom fließe in x -Richtung. Dann kann man für die Feldstärken und $\lambda \varphi \mathfrak{I}_S$ innerhalb des Supraleiters folgende reellen²⁾ Fourierreihen ansetzen:

$$E = E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n(z) e^{-in\omega t} \quad \text{mit } b_0 = 0, b_{-n} = \bar{b}_n \quad (2,4)$$

$$H = H_y = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z) e^{-in\omega t} \quad \text{mit } c_{-n} = \bar{c}_n \quad (2,5)$$

$$\lambda \varphi I_S = \lambda \varphi I_{Sx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n(z) e^{-in\omega t} \quad \text{mit } d_{-n} = \bar{d}_n. \quad (2,6)$$

Dabei besteht nach (1, 1/2) zwischen den Koeffizienten b_n , c_n und d_n folgender Zusammenhang:

$$-in\omega d_n(z) = b_n(z), \quad (2,7)$$

$$-c d'_n(z) = c_n(z). \quad (2,8)$$

Schließlich erhält man aus (2,2) mit (2,7/8)

$$I_S = \sum_{-\infty}^{+\infty} (c^2 d''_n + (n^2 \omega^2 + in\omega \sigma) d_n) e^{-in\omega t}. \quad (2,9)$$

²⁾ Der reelle Ansatz ist wegen der Nicht-Linearität der Gleichungen notwendig.

Zur Vereinfachung setzen wir für den Augenblick:

$$\lambda \varphi I_S = f(I_S), \quad e^{-i\omega t} = \xi \quad (2,10)$$

und

$$c^2 d_n'' + (n^2 \omega^2 + i n \omega \sigma) d_n = e_n,$$

so daß (2,6) und (2,9) nun lauten

$$f(I_S) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \xi^n, \quad (2,6')$$

$$I_S = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_n \xi^n. \quad (2,9')$$

Um hieraus ein System von Differentialgleichungen für die d_n zu gewinnen, entwickeln wir $f(I_S)$ und erhalten wegen des geraden Charakters von φ

$$f(I_S) = \sum_0^{\infty} f_\nu I_S^{2\nu+1}. \quad (2,11)$$

Damit geht (2,6') über in

$$\sum_0^{\infty} f_\nu \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e_n \xi^n \right)^{2\nu+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \xi^n. \quad (2,12)$$

Hieraus läßt sich ablesen, daß $e_{2n} = d_{2n} = 0$, $e_{2n+1} \neq 0$, $d_{2n+1} \neq 0$ zu einer Lösung führt. D. h. bei Verschwinden des überlagerten Gleichstroms werden die 1., 3., 5., ... Oberschwingung durch die Grundschiwingung nicht angeregt. Der Koeffizientenvergleich in (2,12) ergibt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \left(\sum_{i=1}^{2\nu+1} \sum_{n_i=n} e_{n_i} \prod_{i=1}^{2\nu+1} e_{n_i} \right) = d_n. \quad (2,13)$$

Die exakte Auflösung dieses Gleichungssystems dürfte mit nahezu unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft sein. Doch läßt es sich zunächst für große überlagerte Gleichströme vereinfachen. Denn weil dann gilt $|e_{\pm(|n|+1)}| \ll |e_n|$, überwiegen in (2,13) bei weitem jene Summenglieder mit den kleinsten Indicesummen $\sum |n_i|$. Wegen $\sum n_i = n$ sind das diejenigen, bei denen für positives n alle n_i positiv, für negatives n alle n_i negativ sind. D. h. aber, wenn man den Vergleich bei positivem n vornimmt, so erhält man nahezu das gleiche Ergebnis wie beim Ansatz

$$f(I_S) = \sum_0^{\infty} d_n \xi^n, \quad (2,14)^*)$$

$$I_S = \sum_0^{\infty} e_n \xi^n. \quad (2,15)^*)$$

Für verschwindenden Gleichstrom, also $e_{2n} = d_{2n} = 0$, und für $|e_{\pm(|n|+1)}| \ll |e_{\pm(|n|-1)}|$ läßt sich der Schluß mit den Indicesummen in gleicher Weise durchführen^{*)}. Und für kleine Ströme, d. h. wenn $|e_{2n}| \ll |e_{2n\pm 1}|$ und $|e_{\pm(|n|+1)}| \ll |e_{\pm(|n|-1)}|$, bleibt er ebenfalls berechtigt, was die Glieder mit un-

^{*)} Die gesonderte Behandlung der Entwicklungskoeffizienten mit negativem n erübrigt sich wegen $\bar{d}_n = \bar{d}_{-n}$ usw.

^{*)} Dies entspricht dem in der linearen Theorie üblichen komplexen Ansatz und führt also zu einer mathematisch exakten Lösung des Gleichungssystems. Nur der Übergang ins Reelle ist nicht mehr ohne Vernachlässigung durchführbar.

^{*)} Umgekehrt führt der Ansatz (2, 14/15) zu einer Lösung mit $e_{2n} = d_{2n} = 0$.

geradem Index anlangt, während die mit geradem wesentliche Fehler aufweisen werden. Da diese Glieder aber ohnedies klein sind, bleiben sie für die weitere Betrachtung unwesentlich, so daß man sich wohl allgemein auf den verkürzten Ansatz (2,14/15) stützen darf. Physikalisch bedeutet dies, daß die Rückwirkung der höheren Schwingungen auf die niedereren unterdrückt wird. Bei der Anwendung von (2,14/15) ist jedoch zu beachten, daß für $n \neq 0$ erst

$$d_n e^{-i n \omega t} + \text{konj. usw.} \quad (2,16)$$

die physikalische Schwingung darstellt.

Der Koeffizientenvergleich läßt sich nun leicht bewerkstelligen. Durch fortgesetzte Differentiation von (2,14) nach ξ ergibt sich unter Berücksichtigung von (2,15) jeweils für $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} f(e_0) &= d_0, \\ f'(e_0) \cdot e_1 &= d_1, \\ f''(e_0) \cdot e_1^2 + f'(e_0) \cdot 2 e_2 &= 2 d_2, \\ f'''(e_0) \cdot e_1^3 + 6 f''(e_0) e_1 e_2 + 6 f'(e_0) e_3 &= 6 d_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2,17)$$

Hieraus folgt wegen $f''(0) = 0$ bei Stromlosigkeit die Unabhängigkeit der 1. Oberschwingung von der Grundschiwingung (entsprechend der vernachlässigten Rückwirkung).

Den weiteren Rechnungen müssen wir eine geeignete spezielle Form von φ zugrunde legen und wählen im Anschluß an H. Koppe

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - (I_s/I_M)^2}} \quad (2,18)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} f(e_0) &= \frac{\lambda e_0}{\sqrt{1 - (e_0/I_M)^2}}, \\ f'(e_0) &= \frac{\lambda}{(1 - (e_0/I_M)^2)^{3/2}}, \\ f''(e_0) &= \frac{3 \lambda e_0/I_M^2}{(1 - (e_0/I_M)^2)^{5/2}}, \\ f'''(e_0) &= \frac{3 \lambda}{I_M^2} \frac{1 + 4 (e_0/I_M)^2}{(1 - (e_0/I_M)^2)^{7/2}}. \end{aligned} \quad (2,19)$$

(2,10), (2,17) und (2,19) ergibt ineinander eingesetzt die im folgenden zu behandelnden Schwingungsgleichungen.

B) Zusammenhang mit den Wellen im Vakuum und Randbedingungen

Für die Wellen im Vakuum sollen zwei Formen angenommen werden:

Fall 1: Laufende Wellen, d. h. wir lassen die Grundschiwingung einfallen und untersuchen die reflektierten Oberschwingungen.

Fall 2: Stehende Wellen, d. h. wir lassen zunächst die Grundschiwingung einfallen, reflektieren aber alle zurückgeworfenen Wellen an einem im Abstand z^* aufgestellten metallischen Spiegel*).

*) Man könnte daran denken, daß auch das Eindringen der Wellen in diesen nicht supraleitenden Metallspiegel zu berücksichtigen sei. Doch ist dies belanglos, da in diesem Grund- und Oberschwingung nicht gekoppelt sind.

Entsprechend dem verkürzten Ansatz (2,14/15) kann man auch im Vakuum die Glieder mit negativem Exponenten von ξ weglassen und ansetzen:

$$\text{Fall 1: } E_x = a_1^0 e^{i\omega(z/c-t)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\omega(-z/c-t)}, \quad (2,20)$$

$$H_y = a_1^0 e^{i\omega(z/c-t)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\omega(-z/c-t)};$$

$$\text{Fall 2: } E_x = a_1^{*0} e^{i\omega(z/c-t)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \sin \frac{n\omega}{c} (z-z^*) e^{-in\omega t}, \quad (2,21)$$

$$H_y = a_1^{*0} e^{i\omega(z/c-t)} + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos \frac{n\omega}{c} (z-z^*) e^{-in\omega t}.$$

Weil ebenso wie im Supraleiter (vgl. 2,16) für $n \neq 0$ erst $a_n e^{-in\omega t} \psi(z) + \text{konj.}$ die physikalische Welle darstellt, ist die Amplitude der Vakuumwellen:

$$A_n = 2 |a_n|. \quad (2,16')$$

Wegen der Stetigkeit von E_x und H_y an der Stelle $z = 0$ ergibt sich für den Zusammenhang zwischen den Wellen im Vakuum und im Supraleiter:

$$\text{Fall 1: } a_n = -in\omega d_n(0), \quad (n \neq 0,1), \quad (2,22)^7$$

$$a_1^0 = \frac{1}{2} (-i\omega d_1(0) - c d_1'(0));$$

$$\text{Fall 2: } a_n^* \sin \frac{n\omega}{c} z^* = -in\omega d_n(0), \quad (n \neq 0,1), \quad (2,23)^7$$

$$a_1^* e^{\frac{i\omega}{c} z^*} = -\omega d_1(0) - ic d_1'(0).$$

Des weiteren erhält man unter Verwendung von (2,7/8) bei $z = 0$ folgende Randbedingungen für $n \neq 0, 1$:

$$\text{Fall 1: } d_n'(0) = -\frac{1}{c} in\omega d_n(0), \quad (2,24)$$

$$\text{Fall 2: } d_n'(0) = -\frac{n\omega}{c} d_n(0) \operatorname{ctg} \left(\frac{n\omega}{c} z^* \right). \quad (2,25)$$

Hierzu treten noch die Randbedingungen für $z = +\infty$, wo alle physikalisch brauchbaren Lösungen verschwinden müssen.

Den verschiedentlich vorkommenden größenordnungsmäßigen Abschätzungen sollen folgende Werte zugrunde gelegt werden:

$$\lambda = 10^{-31} \text{ sec}^2, \quad (2,26)^8$$

$$\sigma = 10^{19} \text{ sec}^{-1}.$$

§ 3. Die 2. Oberschwingung ohne Gleichstrom

Da im stromlosen Fall $\epsilon_{2n} = d_{2n} = 0$ wird, erhält man aus (2,10), (2,17) und (2,19) folgendes das Schwingungsproblem beschreibende Gleichungssystem:

$$c^2 d_1'' + \left(\omega^2 + i\omega\sigma - \frac{1}{\lambda} \right) d_1 = 0, \quad (3,1)$$

$$c^2 d_3'' + \left(9\omega^2 + 3i\omega\sigma - \frac{1}{\lambda} \right) d_3 = -\frac{1}{2\lambda^2 I_M^2} d_1^3, \quad (3,2)$$

⁷⁾ Im Falle der fortschreitenden Wellen ist es passender, die einfallende, im Falle stehender Wellen die stehende Grundwelle zum Vergleich heranzuziehen.

⁸⁾ Vgl. M. v. Laue, Theorie der Supraleitung, Springer-Verlag 1947 S. 891

dessen im ∞ verschwindende Lösung leicht anzugeben ist:

$$d_1 = d_1^0 e^{\frac{\omega}{c} (i n_1 - k_1) z}, \quad (3,3)$$

$$d_3 = d_3^0 e^{\frac{3\omega}{c} (i n_3 - k_3) z} + \frac{d_1^0{}^3}{4 I_M^2 \lambda^2 (3 i \omega \sigma \lambda - 4)} e^{\frac{3\omega}{c} (i n_1 - k_1) z} \quad (3,4)$$

mit

$$n_j = \frac{1}{j \omega \sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{1}{2} [(j^2 \omega^2 \lambda - 1) + \sqrt{(j^2 \omega^2 \lambda - 1)^2 + (j \omega \sigma \lambda)^2}]} \quad (3,5)$$

und

$$k_j = \frac{1}{j \omega \sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{1}{2} [- (j^2 \omega^2 \lambda - 1) + \sqrt{(j^2 \omega^2 \lambda - 1)^2 + (j \omega \sigma \lambda)^2}]} \quad (3,6)$$

Diese Lösung muß noch mit Hilfe des freien Parameters d_3^0 an die jeweiligen Randbedingungen bei $z = 0$ (2,24 bzw. 25) angepaßt werden. Durch elementare Rechnung folgt schließlich unter Verwendung von (2,22 bzw. 23) für die Amplitude der 2. Oberschwingung im Vakuum:

$$\text{Fall 1: } a_3 = a_1^0 \frac{-6 [(n_3 - n_1) + i (k_3 - k_1)]}{\omega^2 I_M^2 \lambda^2 (3 i \omega \sigma \lambda - 4) (1 + n_3 + i k_3) (1 + n_1 + i k_1)^2} \quad (3,7)$$

$$\text{Fall 2: } a_3^* = a_1^{*3} \frac{3 [(n_3 - n_1) + i (k_3 - k_1)] e^{\frac{3 i \omega}{c} z^*}}{4 \omega^2 I_M^2 \lambda^2 (3 i \omega \sigma \lambda - 4) (1 - n_1 - i k_1)^2 \left[(i n_3 - k_3) \sin \frac{3 \omega}{c} z^* + \cos \frac{3 \omega}{c} z^* \right]} \quad (3,8)$$

Das Maximum von a_3^* ergibt sich — wie zu erwarten — wegen $n_3, k_3 \gg 1$ für $\sin \frac{3 \omega}{c} z^* = 0$, d. h. wenn für die Oberschwingung auf Resonanz abgestimmt ist. Dann vereinfacht sich (3,8) zu

$$a_3^* = a_1^{*3} \frac{3 [(n_3 - n_1) + i (k_3 - k_1)]}{4 \omega^2 I_M^2 \lambda^2 (3 i \omega \sigma \lambda - 4) (1 - n_1 - i k_1)^2} \quad (3,8')$$

Ein Vergleich von (3,8') mit (3,7) zeigt, daß die Amplitude der Oberschwingung um die Größenordnung von n bzw. k zugenommen hat.

Zur Diskussion der Formeln (3,7) und (3,8') beschränken wir uns auf folgende auch für die 1. Oberschwingung bei überlagertem Gleichstrom eingehender untersuchten Frequenzbereiche:

1. Tiefe Frequenzen, d. h. $\omega \sigma \lambda \ll 1$. Nach den numerischen Werten (2,26) bedeutet dies Beschränkung auf $\omega \ll 10^{12} \text{ sec}^{-1}$, d. h. längere als cm-Wellen. Es wird dann $k_j = \frac{1}{j \omega \sqrt{\lambda}} \gg n_j = \frac{\sigma}{2 \sqrt{\lambda}} \gg 1$ und es ergibt sich

$$\left| \frac{a_3}{a_1^0} \right| = |a_1^0|^2 \frac{3 \omega}{I_M^2 \sqrt{\lambda}} \quad (3,7a)$$

bzw.

$$\left| \frac{a_3^*}{a_1^*} \right| = |a_1^*|^2 \frac{1}{8 I_M^2 \lambda} \quad (3,8'a)$$

2. Hohe Frequenzen, d. h. $\omega^2 \lambda \gg 1, \sigma \gg \omega^0$, entsprechend dem im Ultraviolett liegenden Frequenzbereich $3 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1} \ll \omega \ll 10^{15} \text{ sec}^{-1}$. Dann wird

⁰⁾ $\omega > \sigma$ führt ins Gebiet der Röntgenstrahlen.

$k_j = n_j = \sqrt{\frac{\sigma}{3j\omega}}$ und es ergibt sich

$$\left| \frac{a_3}{a_1^0} \right| = |a_1^0|^2 \frac{1,47}{I_M^2 \lambda^3 \omega^{1/2} \sigma^{1/2}} \quad (3,7b)$$

bzw.

$$\left| \frac{a_3^*}{a_1^*} \right| = |a_1^*|^2 \frac{0,106}{I_M^2 \lambda^3 \omega^2 \sigma^2} \quad (3,8'b)$$

§ 4. Die 1. Oberschwingung bei überlagertem Gleichstrom

Im Fall eines überlagerten Gleichstroms beschränken wir uns auf die Berechnung der 1. Oberschwingung und haben daher nach (2,10), (2,17) und (2,19) folgendes Gleichungssystem zu behandeln:

$$c^2 d_0'' = \frac{d_0}{\sqrt{\lambda^2 + (d_0/I_M)^2}}, \quad (4,1)$$

$$c^2 d_1'' + \left[\omega^2 + i \omega \sigma - \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{c^2 d_0''}{I_M} \right)^2 \right)^{1/2} \right] d_1 = 0, \quad (4,2)$$

$$c^2 d_2'' + \left[4\omega^2 + 2i\omega\sigma - \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{c^2 d_0''}{I_M} \right)^2 \right)^{1/2} \right] d_2 = -\frac{3}{2} \frac{d_0^2}{\lambda^2 I_M^2} c^2 d_0' \left(1 - \left(\frac{c^2 d_0''}{I_M} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (4,3)$$

A) Der überlagerte Gleichstrom

Die Integration von (4,1) führt mit der Substitution

$$\chi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d_0}{\lambda I_M} \right)^2}} \quad (4,4)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingung für $z \rightarrow \infty$, wo $d_0 \rightarrow 0$, also $\chi \rightarrow \sqrt{2}$ gehen muß, zur Lösung

$$\sqrt{\lambda} c^2 \left[\sqrt{2} \chi + \frac{1}{2} \ln \frac{\chi - \sqrt{2}}{\chi + \sqrt{2}} \right] = C - z. \quad (4,5)$$

Das additive Auftreten der Integrationskonstanten C neben z bedeutet, daß eine Variation des Gesamtsuprastroms einer Parallelverschiebung der Stromverteilung gleichkommt, wobei natürlich ein Teil der nach (4,5) gegebenen Stromverteilung über die Grenze zwischen physikalischem und mathematischem Raum bei $z = 0$ hinwegrückt. Gerade wegen dieser Eigenschaft empfiehlt es sich für die weiteren Rechnungen oft χ statt z als neue Koordinate einzuführen.

Der Zusammenhang zwischen χ und Gleichstromverteilung ergibt sich nach (2,9) unter Verwendung von (4,4/5) durch elementare Differentiation zu

$$I_S^2 = c^2 d_0'' = I_M \frac{\chi \sqrt{\chi^2 - 2}}{\chi^2 - 1}. \quad (4,6)$$

Und der pro cm Höhe fließende Gesamtsuprastrom ist

$$J_S = \int_0^\infty I_S^2 dz = I_M \sqrt{2} \lambda c^2 \sqrt{\chi_0^2 - 2}. \quad (4,7)$$

Dabei bedeutet χ_0 den Wert an der Stelle $z = 0$.

B) Partikuläre Lösung von (4,3)

Ist die Lösung der homogenen Gl. (4,3) gefunden, so läßt sich eine Lösung der inhomogenen Gleichung sofort mit Hilfe der Greenschen Funktion

$$g(z, \zeta) = \frac{1}{\infty d'(z) {}^0 d(z) - \infty d(z) {}^0 d'(z)} \begin{cases} \infty d(z) {}^0 d(\zeta) & \zeta < z \\ \infty d(\zeta) {}^0 d(z) & \zeta > z \end{cases} \quad (4,8)$$

— ${}^0 d$ bzw. ∞d bedeuten jeweils eine für $z = 0$ bzw. $z = \infty$ verschwindende Lösung der homogenen Gleichung — in Integralform angeben:

$$c^2 d_2^i(z) = \int_0^\infty d_1^i(\zeta) \Phi(\zeta) g(z, \zeta) d\zeta, \quad (4,9)$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi = -\frac{3}{2\lambda^2 I_M} c^2 d_0'' \left(1 - \left(\frac{c^2 d_0''}{I_M} \right)^2 \right) = -\frac{3}{2\lambda^2 I_M} \frac{\chi \sqrt{\chi^2 - 2}}{(\chi^2 - 1)^2} \quad (4,10)$$

eingeführt wurde. Für $z = 0$ folgt hieraus

$$c^2 d_2^i(0) = 0 \quad (4,11)$$

$$c^2 d_2^{i'}(0) = \int_0^\infty d_1^i(\zeta) \Phi(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} g(0, \zeta) d\zeta = -\frac{1}{\infty d(0)} \int_0^\infty d_1^i(z) \Phi(z) \infty d(z) dz. \quad (4,12)$$

In (4,12) tritt nurmehr die im ∞ verschwindende Lösung der homogenen Gl. (4,3) auf, die im folgenden mit d_2^i bezeichnet wird.

C) Hohe Frequenzen

Vor dem Versuch einer allgemeinen Lösung der Gln. (4,2/3) soll noch der besonders leicht zu behandelnde Fall hoher Frequenzen durchgerechnet werden. Denn für $\omega^2 \lambda \gg 1$, $\sigma \gg \omega$ (vgl. § 3!) vereinfacht sich (4,2/3) mit (4,10) zu

$$c^2 d_1'' + (\omega^2 + i\omega\sigma) d_1 = 0, \quad (4,13)$$

$$c^2 d_2'' + (4\omega^2 + 2i\omega\sigma) d_2 = \Phi d_1^2. \quad (4,14)$$

Die im ∞ verschwindenden Lösungen der homogenen Gleichungen sind gegeben durch

$$d_j = d_j^0 e^{\frac{j\omega}{c} (i n_j - k_j) z} \quad j = 1, 2^{10)}. \quad (4,15)$$

mit

$$n_j = k_j = \sqrt{\frac{\sigma}{2j\omega}} \gg 1.$$

Einsetzen in (4,12) ergibt für die inhomogene Lösung

$$c^2 d_2^{i'}(0) = -d_1^{02} \int_0^\infty \Phi(z) e^{\frac{i-1}{c} \sqrt{\omega\sigma} (1+\sqrt{2}) z} dz. \quad (4,16)$$

Dies ist aber ein Fouriersches Integral, das sich durch Produktintegration genähert auswerten läßt, da $\frac{\sqrt{\omega\sigma}}{c} \gg 1$ und Φ „langsam“ veränderlich ist:

$$-c d_2^{i'}(0) = \frac{d_1^{02}}{2,4(i-1)\sqrt{\omega\sigma}} \Phi(0) - \frac{d_1^{02}}{2,4(i-1)\sqrt{\omega\sigma}} \int_0^\infty e^{2,4(i-1)\frac{\sqrt{\omega\sigma}}{c} z} \Phi'(z) dz.$$

¹⁰⁾ Statt d_2 denke man sich d_2^i gesetzt.

Der 2. Term ist aber um Größenordnungen kleiner, so daß man sich auf den ersten beschränken kann:

$$c d_2'(0) = \frac{0,62}{(i-1)\sqrt{\omega\sigma}} \frac{d_1^{0*}}{\lambda^2 I_M} \frac{\chi_0 \sqrt{\chi_0^2 - 2}}{(\chi_0^2 - 1)^5} \quad (4,17)$$

Die Gesamtlösung für die 1. Oberschwingung $d_2 = d_2^h + d_2^i$ muß wiederum den verschiedenen Anfangsbedingungen angepaßt werden. In gleicher Weise wie in § 3 folgt

für Fall 1

$$d_2 = \frac{2,5 a_1^{0*}}{i \sigma^2 \lambda^2 I_M \omega} \frac{\chi_0 \sqrt{\chi_0^2 - 2}}{(\chi_0^2 - 1)^5}, \quad (4,18)$$

für Fall 2

$$a_2^* = \frac{0,62 a_1^{0*} e^{2i \frac{\omega}{c} z^*}}{(1-i) \sigma^{3/2} \omega^{3/2} \lambda^2 I_M \left(\cos \frac{2\omega}{c} z^* + (i n_2 - k_2) \sin \frac{2\omega}{c} z^* \right)} \frac{\chi_0 \sqrt{\chi_0^2 - 2}}{(\chi_0^2 - 1)^5} \quad (4,19)$$

Das Maximum von a_2^* liegt wieder bei Resonanzabstimmung auf die Oberschwingung. Dann ist

$$|a_2^*| = \frac{0,44 |a_1^{0*}|^2}{\sigma^{3/2} \omega^{3/2} \lambda^2 I_M} \frac{\chi_0 \sqrt{\chi_0^2 - 2}}{(\chi_0^2 - 1)^5} \quad (4,19')$$

Bemerkenswert an diesen Formeln dürfte sein, daß der die Stromabhängigkeit beschreibende Faktor $\chi_0 \sqrt{\chi_0^2 - 2}/(\chi_0^2 - 1)^5$ nach (4,7) zunächst linear mit dem Gesamtstrom J_S ansteigt, für $J_S = 0,34 I_M \sqrt{2\lambda c^2}$ ein Maximum der Höhe 0,285 erreicht und für noch größere Ströme sehr stark (mit J_S^3) verschwindet.

D) Integraldarstellung der Lösung für den gesamten Frequenzbereich

Mit (4,6) geht (4,2) und die zu (4,3) gehörige homogene Gleichung über in

$$c^2 d_j'' + \left((j\omega)^2 + i j \omega \sigma - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(\chi^2 - 1)^3} \right) d_j = 0, \quad j = 1, 2^{10}). \quad (4,20)$$

Da eine Einführung von χ statt z zu äußerst komplizierten Gleichungen führt und χ sich nicht explizit als $\chi(z)$ darstellen läßt, wurde versucht, die Funktion $(\chi^2 - 1)^3$ durch eine einfache analytische Funktion von z zu approximieren. Hierzu schien geeignet die sich nach (4,5) asymptotisch für $z \rightarrow \infty$ an $(\chi^2 - 1)^3$ anschmiegende Exponentialfunktion

$$1 + 24 \exp \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda c^2}} (C - z) - 4 \right) \sim (\chi^2 - 1)^3$$

mit

$$24 \exp \left(\frac{2C}{\sqrt{\lambda c^2}} - 4 \right) \sim (\chi_0^2 - 1)^3 - 1. \quad (4,21)$$

In welcher überraschender Weise diese beiden Funktionen miteinander übereinstimmen, möge Abb. 1 zeigen. Der Ersatz ist demnach berechtigt bis $\chi = 2/\sqrt{2}$, d. h. $J_S = \sqrt{12\lambda c^2} I_M$, also bis zu Größenordnungen, wo i. a. schon längst die Supraleitung durch das Eigenmagnetfeld aufgehoben ist. (4,20) geht hierdurch über in

$$c^2 d_j'' + \left((j\omega)^2 + i j \omega \sigma - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + [(\chi_0^2 - 1)^3 - 1] \exp \left(\frac{-2z}{\sqrt{\lambda c^2}} \right)} \right) d_j = 0. \quad (4,22)$$

Zur Auflösung führen wir ein:

$$[(\chi_0^2 - 1)^3 - 1] \exp\left(\frac{-2z}{\sqrt{\lambda c^2}}\right) \sim (\chi^2 - 2)(\chi^4 - \chi^2 + 1) = -v \quad (4,23)$$

und

$$d_j = d_j^0 v^{\mu_j} F_j \quad \text{mit } \mu_j > 0, \quad (4,24)$$

da d_j für $z \rightarrow \infty$, d. h. $v = 0$ verschwindet. Wählt man für den noch freien Parameter μ_j zur Vereinfachung den Wert

$$\mu_j = +\frac{1}{2} \sqrt{1 - \lambda [(j\omega)^2 + i j \omega \sigma]}, \quad (4,25)$$

so folgt für F_j die Differentialgleichung

$$v(1-v) \frac{d^2}{dv^2} F_j + (2\mu_j + 1)(1-v) \frac{d}{dv} F_j - \frac{1}{4} F_j = 0, \quad (4,26)$$

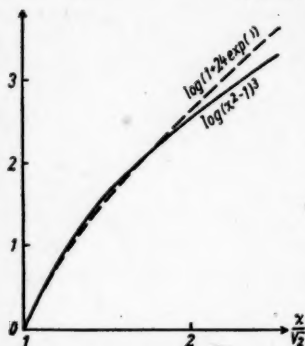
die mit der der hypergeometrischen Funktion $F(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, v)$ übereinstimmt, wenn man setzt

$$\gamma_j = 2\mu_j + 1,$$

$$\alpha_j + \beta_j = 2\mu_j, \quad (4,27)$$

$$\alpha_j \beta_j = \frac{1}{4}.$$

Abb. 1. Vergleich von $(\chi^2 - 1)^3$ mit der verwendeten Ersatzfunktion



Des weiteren bezeichnen wir zur Abkürzung die logarithmische Ableitung von d_j mit

$$\psi_j = \frac{d}{dz} d_j = \frac{6}{\sqrt{2\lambda c^2}} (\chi^2 - 2)(\chi^2 - 1) \chi \left[\frac{\mu_j}{v} + \frac{d}{dv} \frac{F_j}{F_j} \right]. \quad (4,28)$$

Wenn man noch beachtet, daß für alle in Frage kommenden Ströme

$$\psi_j \gg \frac{j\omega}{c} \quad (4,29)$$

gilt, erhält man mit (4,11) aus den Randbedingungen (2,24 bzw. 25)

im Fall 1 $d_2(0) \psi_2(v_0) = -d_2^{i'}(0), \quad (4,30)$

im Fall 2 $d_2(0) \left(\frac{2\omega}{c} \operatorname{ctg} \frac{2\omega}{c} z^* + \psi_2(v_0) \right) = -d_2^{i'}(0). \quad (4,31)$

Dabei ist nach (4,5), (4,10), (4,12) und (4,24) unter Einführung von

$$u = \chi^2 - 2, \quad v = -u(u^2 + 3u + 3) \quad (4,32)$$

und

$$i \int_0^{u_2} v^{2\mu_1 + \mu_2} F_1^2 F_2 \frac{du}{(u+1)^4 \sqrt{u}} = \int \quad (4,33)$$

$$d_2^{i'}(0) = \frac{3}{2} \frac{d_1^{0,2} \int}{i \lambda \sqrt{2\lambda c^2} I_{\Sigma} v_0^{\mu_2} F_2(v_0)}. \quad (4,34)$$

Schließlich bleibt noch der Zusammenhang zwischen d_1^0 und a_1^0 bzw. a_1^* abzuleiten. Aus (2,22 bzw. 23), (4,24) und (4,28 mit 29) folgt

im Fall 1 $a_1^0 = -\frac{c}{2} \psi_1(v_0) v_0^{\mu_1} F_1(v_0) d_1^0, \quad (4,35)$

im Fall 2 $a_1^* e^{\frac{i\omega}{c} z^*} = -i c \psi_1(v_0) v_0^{\mu_1} F_1(v_0) d_1^0. \quad (4,36)$

Faßt man nun (2,22 bzw. 23), (4,30 bzw. 31), (4,34) und (4,35 bzw. 36) zusammen, so erhält man

$$\text{im Fall 1} \quad a_2 = \frac{24 a_1^{02} \omega f}{(2 \lambda c^2)^{1/2} I_M v_0^{2\mu_1+\mu_2} F_1^2(v_0) F_2(v_0) \psi_1^2(v_0) \psi_2(v_0)} \quad (4,37)$$

und im Fall 2

$$a_2^* = - \frac{6 a_1^{*2} \omega e^{\frac{2i\omega}{c} z^*} f}{(2 \lambda c^2)^{1/2} I_M v_0^{2\mu_1+\mu_2} F_1^2(v_0) F_2(v_0) \psi_1^2(v_0) \left(\psi_2(v_0) \sin \frac{2\omega}{c} z^* + \frac{2\omega}{c} \cos \frac{2\omega}{c} z^* \right)} \quad (4,38)$$

bzw. bei Resonanzabstimmung auf die Oberschwingung

$$a_2^* = - \frac{3 a_1^{*2} f}{(2 \lambda)^{1/2} c^2 I_M v_0^{2\mu_1+\mu_2} F_1^2(v_0) F_2(v_0) \psi_1^2(v_0)} \quad (4,38')$$

Dies ist zwar die Lösung für den gesamten Frequenzbereich; doch dürfte die Auswertung des Integrals i. a. auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen wegen des dreifachen Produktes hypergeometrischer Funktionen, die überdies noch vom komplexen Parameter μ abhängen.

E) Auswertung für kleine Frequenzen

Für $\omega \sigma \lambda \ll 1$ ist nach (4,25 und 27)

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2 = \frac{1}{2}, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = 2, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4,39)''$$

Damit wird

$$F_1 = F_2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, v\right) \quad (4,40)$$

und

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{6}{\sqrt{2 \lambda c^2}} u(u+1) \sqrt{u+2} \left[\frac{1}{2v} + \frac{d}{dv} \frac{F}{F} \right] = \psi. \quad (4,41)$$

Man erhält also für (4,37 bzw. 38')

$$\frac{a_2}{a_1^0} = i \frac{a_1^0 \omega}{I_M} \Xi \quad (4,42)$$

bzw.

$$\frac{a_2^*}{a_1^*} = -i \frac{a_1^*}{\sqrt{\lambda} I_M} \Xi^* \quad (4,43)$$

mit den nurmehr vom Supraleichstrom abhängenden Faktoren

$$\Xi = \frac{24 f}{(2 \lambda c^2)^{1/2} |v_0|^{1/2} F(v_0)^3 \psi(v_0)^3} \quad (4,44)$$

und

$$\Xi^* = \frac{3 f}{\sqrt{2} (2 \lambda c^2)^{1/2} |v_0|^{1/2} F(v_0)^3 \psi(v_0)^3}, \quad (4,45)$$

wobei sich das Integral vereinfacht zu

$$f = \int_0^{\mu_0} [(u^2 + 3u + 3)^{1/2} F]^3 \frac{u du}{(u+1)^4}. \quad (4,46)$$

¹¹⁾ Der hierdurch hervorgerufene Fehler des Endergebnisses liegt in der Größenordnung des relativen Fehlers von $|\mu|$.

Bemerkungen zur numerischen Berechnung von Ξ und Ξ^{*12} : Für $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, v)$ gilt folgende Integraldarstellung

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t'}{t'(1-vt')}} dt' = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-vt^2}} dt.$$

Dies ist aber das vollständige ell. Integral $\frac{4}{\pi} B(i\sqrt{v})$, das sich in tabulierte Integrale umformen läßt. Ebenso gelingt dies bei $\frac{dF}{dv}$. Zur Auswertung des \int bedient man sich am

besten der Tatsache, daß der Faktor $(u^2 + 3u + 3)^{1/2} F$ im fraglichen Bereich bis auf etwa 2% konstant bleibt.

Es ergab sich für die Faktoren Ξ und Ξ^* der in Abb. 2 aufgetragene Verlauf.

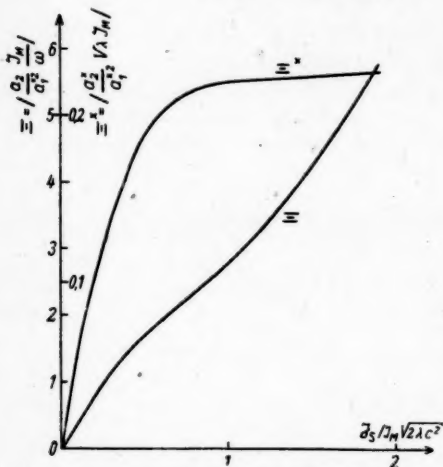


Abb. 2. Stromabhängigkeit der 1. Oberschwingung bei tiefen Frequenzen

ungen anregen kann. Dies wird bei Resonanzabstimmung vermieden, da sich hier ein Gleichgewicht einstellen muß und sich somit das Verhältnis von Grund- zu Oberschwingung nahezu ungeändert aus dem Supraleiter ins Vakuum fortsetzt. Es lassen sich also bei diesem Experiment besser als beim anderen Rückschlüsse aus den Verhältnissen im Vakuum auf die im Supraleiter machen.

Damit läßt sich auch die Frequenzabhängigkeit deuten. Denn beim Fall 2 sinkt der Effekt monoton mit zunehmendem ω (für kleine ω noch nicht, für große stark) entsprechend der durch (1,1) ausgedrückten Trägheit des Suprastroms.

Das Ausbleiben der ungeradzahigen Oberschwingungen ohne Strom ist eine Folge des geraden Charakters von φ . — Weil infolge der Sättigung in Gebieten mit $I_S^2 \sim I_M$ der Suprastrom nur sehr träge den Schwingungen des elektrischen Feldes folgen kann (vgl. (1,1)), vermag er auch dort nur einen sehr geringen Bei-

¹²⁾ Vgl. hierzu Magnus-Oberhettinger, Formeln und Sätze für die spez. Funktionen der math. Physik, Springer-Verlag 1943 und Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen, Teubner 1948.

trag zum gesamten Oberschwingungseffekt zu liefern¹³⁾. Eine Folge hiervon ist, daß im Fall 2 bei niederen Frequenzen die 1. Oberschwingung mit zunehmendem Gleichstrom einem Sättigungswert zustrebt. Denn bei der weiteren Erhöhung eines starken Gleichstroms treten neben der nach innen verschobenen ursprünglichen Stromverteilung am Rande nur Gebiete mit hoher Stromdichte auf, durch die die Oberschwingung nur unwesentlich verstärkt wird. Daß diese im Fall 1 dennoch weiter zunimmt, rührt von der Änderung des „Brechungsindex“ an der Oberfläche her. Das bei hohen Frequenzen auftretende Maximum des Oberschwingungseffektes im Vakuum erklärt sich dadurch, daß die Gebiete des Supraleiters mit starkem Oberschwingungseffekt für große Ströme von der Oberfläche abzurücken und die Oberschwingungen wegen der nunmehr wesentlichen Dämpfung nur geschwächt zur Oberfläche durchdringen.

Zur Größenordnungsmäßigen Abschätzung der Effekte benötigt man I_M . H. Koppe erhielt¹⁴⁾

$$I_M = \frac{16}{\pi^2} T_S \frac{e k K^2}{\hbar} F(T/T_S). \quad (5,1)$$

Dabei ist K der Radius der Fermikugel im Wellenzahlenraum und die Funktion $F(T/T_S)$ gegeben durch¹⁵⁾

$$\begin{array}{cccccc} T/T_S = & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ F(T/T_S) = & 0,1393 & 0,1122 & 0,03649 & 0,04453 & 0,02404. \end{array}$$

Für kleinere T/T_S genügt die Reihenentwicklung

$$F(T/T_S) = 1/3 (T/T_S)^4 - 1/9 (T/T_S)^6 + \dots$$

Nimmt man als Radius der Fermikugel den mittleren Wert $\frac{2\pi}{5} 10^8 \text{ cm}^{-1}$, so ergibt sich für hohe Sprungtemperatur $T_S \sim 10^9$

$$I_M \sim 5 \cdot 10^{13} F(T/T_S).$$

Für hohe Frequenzen erhält man damit — wie zu erwarten — nicht meßbare Größenordnung. Und bei tiefen Frequenzen kommt in dem für das Experiment günstigsten Bereich zwischen $T_S/2$ und $T_S/4$ nur der Fall mit Resonanzabstimmung in Frage. Unter Verwendung von (2,16') ergibt sich hierfür

$$\begin{array}{l} T = \quad \quad \quad T_S/2 \quad \quad \quad T_S/4 \\ \text{2. Oberschw. o. Strom: } \frac{A_2^*}{A_1^*} \sim \frac{A_1^{*2}}{9,7 \cdot 10^{12} (\text{Volt/cm})^2} \quad \frac{A_1^{*2}}{3,6 \cdot 10^{12} (\text{Volt/cm})^2} \\ \text{1. Oberschw. m. Strom: } \frac{A_2^*}{A_1^*} \sim \frac{A_1^{*2} \mathcal{E}^*}{6 \cdot 10^{12} (\text{Volt/cm})} \quad \frac{A_1^{*2} \mathcal{E}^*}{3,6 \cdot 10^{12} (\text{Volt/cm})} \end{array}$$

Dabei wird $\mathcal{E}^* \sim 0,2$ für Ströme $J_S > 500 \text{ Amp/cm}^{16)}$. Nimmt man für A_1^* 10^2 bis 10^3 Volt/cm — dies ist sicher möglich, wenn man nicht nur auf die Ober-, sondern auch auf die Grundschwingung abstimmt —, so kommt die 1. Oberschwingung schon durchaus in den Bereich des Meßbaren, kaum aber die 2. ohne

¹³⁾ Darum verschwindet auch in (4,3) für $I_S = c^2 d_0'' = I_M$ die Koppelung zwischen Grund- und Oberschwingung.

¹⁴⁾ E Abschnitt 3 Formel (64,1).

¹⁵⁾ E Seite 326.

¹⁶⁾ Viel größer kann J_S wegen des magnetischen Schwellenwertes nicht gewählt werden.

Strom. — Überhaupt wird sich ohne überlagerten Gleichstrom nur schwer die Quelle der Oberschwingungen (Supraleiter oder Primärwelle) feststellen lassen. Wir schlagen darum vor, die Stromabhängigkeit des Oberschwingungseffektes auszunützen und, damit diese besonders groß wird, nur die ungeradzahligan Oberschwingungen zu verwerten. Dies läßt sich dadurch bewerkstelligen, daß man an den ersten auf ω abgestimmten Resonanzraum einen zweiten auf 2ω abgestimmten anschließt. — Natürlich müßten die hier abgeleiteten Ergebnisse noch auf ein Lecherleitungssystem übertragen werden, was jedoch ohne allzu großen Einfluß bleibt.

Größere Bedenken könnte verursachen, daß die der Rechnung zugrunde gelegte mathematische Form von φ auch im Falle der Gültigkeit der nichtlinearen Theorie noch zu modifizieren ist. Doch ist kaum zu erwarten, daß dies von grundlegendem Einfluß auf das Endergebnis ist.

§ 6. Zusammenfassung

Es wird vorgeschlagen, die Berechtigung der nichtlinearen Theorie der Supraleitung (Heisenberg, Koppe) an der Reflexion elektromagnetischer Wellen zu prüfen, da in diesem Falle bekanntlich Oberschwingungen entstehen, im allgemeinen allerdings nur geradzahligar Ordnung und sehr geringer Intensität. Überlagert man aber dem Supraleiter einen Gleichstrom, so lassen sich auch die ungeradzahligan Oberschwingungen erzeugen, deren erste im Vorstehenden näher untersucht ist. Die erreichbare Intensität wird durchaus als beobachtbar gefunden. Infolge der Abhängigkeit ihrer Intensität vom überlagerten Gleichstrom läßt sie sich von den in praxi stets vorhandenen Oberschwingungen in der einfallenden Welle unterscheiden.

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. H. Ott möchte ich auch an dieser Stelle meinen Dank für Anregung und Förderung der Arbeit aussprechen. Herrn Dr. H. Koppe schulde ich Dank für Überlassung eines Exemplars seines Artikels in den Ergebnissen der exakten Naturwissenschaften noch vor dessen Veröffentlichung.

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 21. August 1950.)

Fehlordnungerscheinungen und Platzwechselvorgänge in elektronenleitenden Mischphasen

Von Karl Hauße

(Mit 7 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Wagner-Schottkysche Fehlordnungstheorie wird auf elektronenleitende heterotype Mischphasen erweitert. Hierbei kann sowohl modellmäßig wie experimentell gezeigt werden, daß ein Zusatz höher- und niederwertiger Oxyde zu einem Wirts-Oxyd definierte Leitfähigkeitsänderungen im Sinne der Halbleitertheorie ergibt. Folgende allgemeine Regeln wurden gefunden:

1. Die elektrische Leitfähigkeit von Elektronendefektleitern wird durch Zusatz niederwertiger Kationen erhöht und durch Zusatz von höherwertigen Kationen erniedrigt.

2. Bei Elektronenüberschußleitern treten gerade umgekehrte Verhältnisse auf. Hier wird die elektrische Leitfähigkeit durch Zusatz niederwertiger Kationen erniedrigt und durch Zusatz höherwertiger Kationen erhöht.

3. Halbleiter mit Gittereigenhalbleitung zeigen sowohl bei Zusatz höherer wie niederwertiger Kationen eine Leitfähigkeitszunahme.

Die an elektronenleitenden Mischsystemen gefundenen Gesetzmäßigkeiten gestatten an Hand der Wagnerschen Theorie der Zundervorgänge an Metallegierungen eine Vorhersage über die Beeinflussung der Zundergeschwindigkeit eines Metalls durch Zusätze fremder Metalle.

1. Einleitung

Nach dem heutigen Stande der Halbleitertheorie kann man unter Ausschluß der Metalle die festen Stoffe — insbesondere die Ionenkristalle — in die Gruppe der ionenleitenden und in die der elektronenleitenden Halbleiter einteilen. Ionenkristalle mit gleichzeitiger erheblicher Ionen- und Elektronenbeteiligung am Stromtransport sind selten und können als Ausnahmen der Zweiteilung angesehen werden. Im folgenden wollen wir uns nur mit den elektronenleitenden Halbleitern befassen und auch hier nur die elektronenleitenden einfachen Ionenkristalle, wie z. B. NiO , ZnO , CuO , Fe_2O_3 usw. kurz streifen und nur dasjenige eingehender betrachten, was zum Verständnis der Fehlordnungerscheinungen und Platzwechselvorgänge in elektronenleitenden Mischphasen, wie beispielsweise $\text{ZnO} + \text{Al}_2\text{O}_3$, $\text{ZnO} + \text{Cr}_2\text{O}_3$, $\text{NiO} + \text{Li}_2\text{O}$, $\text{NiO} + \text{Cr}_2\text{O}_3$ usw. notwendig ist. Im folgenden wollen wir die elektronenleitenden Halbleiter kurz als Halbleiter schlechthin bezeichnen und uns damit dem Sprachgebrauch der „Halbleiter-Techniker“ anschließen.

Im allgemeinen kann man die Halbleiter in drei Gruppen einteilen.

1. **Eigenhalbleiter:** Diese werden nur an stöchiometrisch zusammengesetzten Ionenkristallen ohne nennenswerten Überschuß an Metall oder Metalloid, wie z. B. CuO beobachtet. Während in den meisten Fällen dieser Halbleiter die Ionenfehlordnung noch nicht geklärt ist, nimmt man eine Elektronenfehlordnung in der Weise an, daß ein auf Gitterplatz befindliches Elektron seinen Gitterplatz verläßt und somit als quasifreies Elektron $e_{(z)}$ vorhanden ist unter gleichzeitiger Erzeugung einer Elektronendefektstelle $\square(e^-)$

$$\text{Ungestörter Kristall} \rightleftharpoons e_{(z)} + \square(e^-) \quad (1)$$

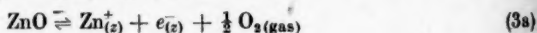
$$\text{z. B.} \quad \text{CuO (ungestört)} \rightleftharpoons \text{Cu}_{(g)}^+ + \text{Cu}_{(g)}^{2+}. \quad (1a)$$

Wie man aus (1) erkennt, ist das Charakteristische eines Eigenhalbleiters die Gleichheit der Konzentration an quasi-freien Elektronen $x_{e_{(z)}}$ und Elektronendefektstellen $x_{\square(e^-)}$

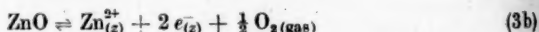
$$x_{e_{(z)}} = x_{\square(e^-)}. \quad (2)$$

2. **Elektronenüberschußleiter:** Ein Elektronenüberschußleiter ist ein nichtstöchiometrisch zusammengesetzter Ionenkristall mit einem Metallüberschuß. Ein Metallüberschuß kann dadurch auftreten, daß z. B. ein Metalloxyd bei höheren Temperaturen eine gewisse Menge Sauerstoff abgibt, wobei es entweder zu einem Überschuß an Kationen durch Einbau auf Zwischengitterplätzen $K_{(z)}^+$ oder zu einem Unterschub an Sauerstoff durch Ausbildung von O^{2-} -Leerstellen $\square(O^{2-})$ kommt.

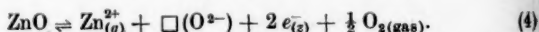
In jedem Fall muß aus Elektroneutralitätsgründen eine äquivalente Zahl überschüssiger Elektronen vorhanden sein, die entweder alle oder nur zu einem bestimmten Prozentsatz als quasifreie Elektronen dem Stromtransport zur Verfügung stehen. Als Vertreter eines Elektronenüberschußleiters wählen wir ZnO, das auf folgenden zwei Wegen dissoziieren kann



bzw.



und



Eine Entscheidung zwischen den Dissoziationsmechanismen (3) und (4) ist z. Z. noch nicht möglich. Jedoch dürfte die Annahme von Zinkionen auf Zwischengitterplätzen eine wesentliche Stütze in den Austauschversuchen mit radioaktivem Zn^{65} von Miller¹⁾ haben.

Während bei den Eigenhalbleitern die elektrische Leitfähigkeit unabhängig vom Sauerstoffdruck ist, folgt hier die elektrische Leitfähigkeit κ gemäß den Umsetzungsgleichungen (3a) und (3b) — (4) wollen wir außer Acht lassen —

$$\kappa = \text{konst} \cdot p_{\text{O}_2}^{-1/2} \quad (5a)$$

bzw.

$$\kappa = \text{konst} \cdot p_{\text{O}_2}^{-1/4}. \quad (5b)$$

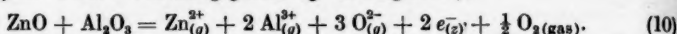
Das Experiment brachte κ proportionale $p_{\text{O}_2}^{-1/4.2}$ bis $p_{\text{O}_2}^{-1/3}$.

¹⁾ P. H. Miller, *Physic. Rev.* **60**, 890 (1941).

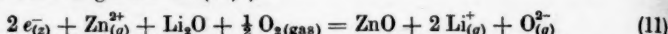
²⁾ H. H. v. Baumbach u. C. Wagner, *Z. physik. Chem. (B)* **18**, 199 (1933).

³⁾ K. Hauffe u. J. Block, unveröffentlichte Messungen; vgl. auch K. Hauffe u. A. L. Vierk, *Z. physik. Chem.* **196**, 160 (1950).

gitterplätzen. Den Bruttovorgang des Einbaus von Al_2O_3 in ZnO können wir durch folgende symbolische Umsetzungsgleichung wiedergeben⁶⁾:



Beim Einbau einwertiger Kationen, z. B. in Form von Li_2O oder Na_2O , in das ZnO -Gitter muß es gemäß Gl. (11)⁷⁾



zu einer Abnahme der Konzentration an quasi-freien Elektronen $e_{(z)}^-$ kommen (Abb. 2), wodurch nach der Massenwirkungsbedingung (9) die Konzentration an Zinkionen auf Zwischengitterplätzen zunehmen muß. Hierdurch folgt Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit des ZnO - Li_2O -Mischoxyds mit steigendem Gehalt an Li_2O .

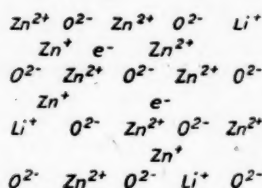


Abb. 2. Mögliches Fehlordnungsmodell eines ZnO - Li_2O -Mischkristalls. (Hier ist die Zahl der Zn-Ionen auf Zwischengitterplätzen größer als die der quasi-freien Elektronen)

Der quantitative Verlauf der Leitfähigkeitszunahme einer ZnO - Al_2O_3 -Mischphase bzw. des Leitfähigkeitsverhältnisses der Mischphase κ zur reinen ZnO -Phase κ^0 mit steigendem Al_2O_3 -Gehalt kann aus dem Ansatz (9) und der Neutralitätsbedingung

$$x_{e_{(z)}^-} = x_{\text{Zn}_{(z)}^{2+}} + x_{\text{Al}^{3+}} \quad (12)$$

erhalten werden zu

$$\frac{\kappa}{\kappa^0} = \frac{x_{\text{Al}^{3+}}}{2 x_{e_{(z)}^-}^0} + \sqrt{\left(\frac{x_{\text{Al}^{3+}}}{2 x_{e_{(z)}^-}^0} \right)^2 + 1}. \quad (13)$$

Hieraus ergibt sich für $x_{\text{Al}^{3+}} \ll x_{e_{(z)}^-}^0$ (Der Index ⁰ bedeutet stets die reine Phase)

$$\frac{\kappa}{\kappa^0} \cong \frac{x_{\text{Al}^{3+}}}{x_{e_{(z)}^-}^0}. \quad (14)$$

Entsprechend erhalten wir für das Verhältnis der elektrischen Leitfähigkeit der ZnO - Li_2O -Mischphase κ zur reinen ZnO -Phase κ^0 unter Beachtung der Neu-

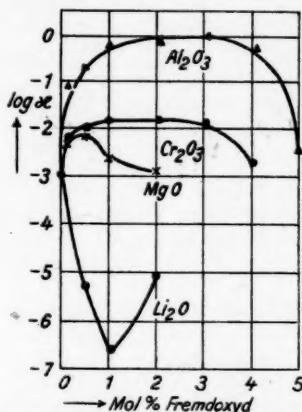


Abb. 3. Die elektrische Leitfähigkeit von ZnO mit steigenden Fremdoxidzusätzen

⁶⁾ K. Hauße u. A. L. Vierk, Z. physik. Chem. **196**, 160 (1950).

⁷⁾ Der Index *g* bedeutet Ionen bzw. Elektronen auf Gitterplätzen.

tralitätsbedingung

$$x_{\text{Zn}^{2+}} = x_{e^{(s)}} + x_{\text{Li}^{+}} \quad (15)$$

und für den Fall $x_{\text{Li}^{+}} \gg x_{e^{(s)}}^0$

$$\frac{x}{x^0} \cong \frac{x_{e^{(s)}}^0}{x_{\text{Li}^{+}}^0} \quad (16)$$

Die Versuchsergebnisse (s. Abb. 3) bestätigen die Richtigkeit obiger Modellvorstellungen zur Fehlordnung der oxydischen Mischphasen. Jedoch sind bereits bei Zusatz von einem Mol% Al_2O_3 bzw. Cr_2O_3 und Li_2O bzw. Na_2O die Abweichungen des gefundenen vom theoretisch erwarteten Verlauf der Leitfähigkeitskurve beachtlich. Sowohl die Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit bei höheren Al_2O_3 -Gehalten wie die Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit bei höheren Li_2O -Gehalten kann z. Z. noch nicht plausibel gedeutet werden.

b) Das defektelektronenleitende Nickeloxyd mit Zusätzen anderswertiger Oxyde

In einer kürzlich erschienenen Arbeit von Verwey und Mitarbeitern⁹⁾ wird ausgeführt, daß die elektrische Leitfähigkeit von bei 1200° C und 1 atm. Luft getempertem NiO mit steigendem Gehalt an Li_2O zunimmt. Dies steht im Einklang mit den nach der Fehlordnungstheorie zu erwartenden Effekten. Unter Zugrundelegung des Fehlordnungsmodells des reinen NiO mit Ni^{2+} -Leerstellen und Elektronendefektstellen müssen aus Elektroneutralitätsgründen beim Einbau von Li_2O in das NiO-Gitter an Stelle eines 2-wertigen Ni-Ions zwei einwertige Li-Ionen in das Gitter eintreten. Hierbei wird pro eingebautes Li_2O eine Kationen-leerstelle besetzt. Da aber der Gleichgewichtszustand zwischen Ni^{2+} -Leerstellen $\square(\text{Ni}^{2+})$ und Elektronendefektstellen $\square(e^-)$ gemäß der symbolischen Umsetzungs-gleichung (6) mit dem Massenwirkungsgesetz für konstanten Sauerstoffpartial-druck

$$x_{\square(\text{Ni}^{2+})} \cdot x_{\square(e^-)}^2 = K \quad (\text{für } p_{\text{O}_2} = \text{konst}) \quad (17)$$

festgelegt ist, muß es zu einer Nachlieferung von Ni^{2+} -Leerstellen in der Weise kommen, daß Nickelionen ihre Gitterplätze verlassen und in Gemeinschaft mit einer äquivalenten Menge an Elektronen zur Oberfläche wandern und mit dem an der Oberfläche befindlichen Sauerstoff ein nach außen erweitertes NiO-Gitter bilden. Hierdurch nimmt die Zahl der Elektronendefektstellen, repräsentiert durch 3-wertige Ni-Ionen, zu, was eine Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit zur Folge hat, während die Konzentration der Ni^{2+} -Leerstellen nach (17) abnimmt. Den Bruttovorgang können wir in folgender Weise schreiben:

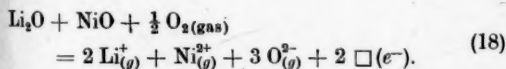


Abb. 4. zeigt das Fehlordnungsmodell eines NiO— Li_2O -Mischoxyds. Unter Beachtung der Elektroneutralitätsbedingung

$$x_{\square(e^-)} = 2 x_{\square(\text{Ni}^{2+})} + x_{\text{Li}^{+}} \quad (19)$$

⁹⁾ F. J. W. Verwey, P. W. Haayman u. F. C. Romeyn, Chem. Weekblad 44, 705 (1948).

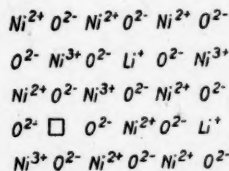


Abb. 4. Fehlordnungsmodell eines NiO— Li_2O -Mischkristalls. (Die Elektronendefektstellen werden hier durch 3-wertige Ni-Ionen repräsentiert)

und des Falles $x_{\text{Li}_2\text{O}} \gg x_{\square(\epsilon)}^0$ folgt für das Leitfähigkeitsverhältnis der Mischphase x und der reinen NiO-Phase x^0

$$\frac{x}{x^0} \cong \frac{x_{\text{Li}_2\text{O}}}{2 x_{\square(\epsilon)}^0} \quad (20)$$

Abb. 5 zeigt im Gegensatz zu den Versuchsergebnissen an ZnO mit Zusätzen, daß die von Verwey und Mitarbeitern am NiO erhaltenen Meßpunkte mit beachtlicher Genauigkeit auf einer Geraden liegen, wenn man x/x^0 gegen $\frac{1}{2} x_{\text{Li}_2\text{O}}$ aufträgt. Daß die Elektronendefektstellenkonzentration durch den Einbau von

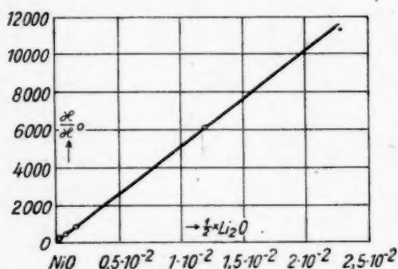


Abb. 5. Leitfähigkeitszunahme des NiO—Li₂O-Mischoxyds mit steigendem Gehalt an Li₂O nach Versuchsdaten von Verwey und Mitarbeitern

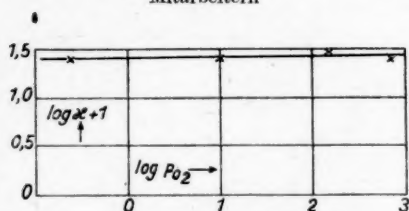


Abb. 6. Sauerstoffdruckunabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit eines NiO—Li₂O-Mischoxyds mit 1,0 Mol% Li₂O bei 800° C

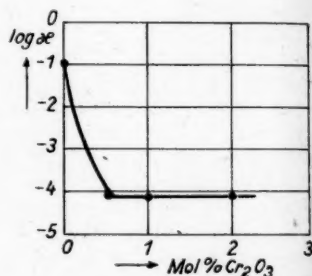


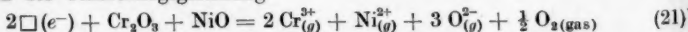
Abb. 7. Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von NiO—Cr₂O₃-Mischoxyden vom Cr₂O₃-Gehalt bei 400° C

Beweglichkeit der Elektronendefektstellen $B_{\square(\epsilon)}$ (in $\text{cm}^2 \cdot \text{Volt}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) von $3,4 \cdot 10^{-3}$ ist auffallend klein.

Bei Zusatz höherwertiger Kationen zu NiO in Form von Cr₂O₃ muß demnach die elektrische Leitfähigkeit abnehmen. Daß dieses der Fall ist, konnte am System NiO—Cr₂O₃ nachgewiesen werden. Hier wurde die elektrische Leitfähigkeit von NiO durch einen Zusatz von 0,5 Mol% Cr₂O₃ um den Faktor 10^3 erniedrigt.

($T = 400^\circ \text{C}$ und $p_{\text{O}_2} = \frac{1}{5} \text{ atm}$) (S. Abb. 7)⁹⁾. Erhöhung des Zusatzes an Cr₂O₃ verursachte keine weitere Leitfähigkeitsabnahme. (Erreichen der Löslichkeitsgrenze von Cr₂O₃ in NiO.)

Gemäß der Umsetzungsgleichung



⁹⁾ K. Hauße u. J. Block, Z. physik. Chem. im Druck.

werden Elektronendefektstellen vernichtet und Kationenleerstellen erzeugt. Dies steht wiederum im Einklang mit der Zunahme der Oxydationsgeschwindigkeit von Nickel-Chromlegierungen mit steigendem Gehalt an Chrom¹⁰⁾. Unter Verwendung der Neutralitätsbedingung

$$x_{\square(\text{Ni}^{2+})} = \frac{1}{2} x_{\square(e^-)} + \frac{1}{2} x_{\text{Cr}^{3+}} \quad (22)$$

und dem Massenwirkungsansatz (17) unter Beachtung $x_{\square(\text{Ni}^{2+})} \cong \frac{1}{2} x_{\text{Cr}^{3+}}$ erhalten wir aus dem Massenwirkungsansatz für die Mischphase

$$\frac{1}{2} x_{\text{Cr}^{3+}} \cdot x_{\square(e^-)}^0 = K \quad (\text{für } p_{\text{O}_2} = \text{konst. und } x_{\text{Cr}^{3+}} \gg x_{\square(e^-)}^0) \quad (23)$$

für das Verhältnis der elektrischen Leitfähigkeit der Mischphase κ zu der der reinen NiO-Phase κ^0

$$\frac{\kappa}{\kappa^0} = \sqrt{\frac{2 x_{\square(\text{Ni}^{2+})}^0}{x_{\text{Cr}^{3+}}}} \quad (24)$$

Wenn schon heute nach den z. Z. noch spärlichen experimentellen Daten eine allgemeine Aussage statthaft ist, so kann man folgende allgemeine Regeln aufstellen:

1. Die elektrische Leitfähigkeit von Elektronendefektleitern wird durch Zusatz niederwertiger Kationen erhöht und durch Zusatz höherwertiger Kationen erniedrigt.

2. Bei Elektronenüberschußleitern treten gerade umgekehrte Verhältnisse auf. Hier wird die elektrische Leitfähigkeit durch Zusatz niederwertiger Kationen erniedrigt und durch Zusatz höherwertiger Kationen erhöht.

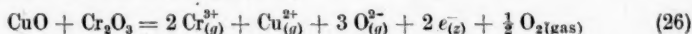
c) Ein Oxyd mit Gittereigenhalbleitung mit Zusätzen anderswertiger Oxyde

Wie auf S. 202 bereits angedeutet, scheint CuO ein Oxyd mit Gittereigenhalbleitung zu sein^{10a)}. D. h. entsprechend einem durch Temperatur und Druck abhängigen thermodynamischen Gleichgewicht, werden im stöchiometrisch zusammengesetzten CuO eine gewisse Zahl Elektronen auf Gitterplätzen $e_{(g)}$ ihre Gitterplätze verlassen und hierbei als quasi-freie Elektronen auftreten $e_{(z)}$ unter gleichzeitiger Erzeugung der gleichen Zahl von Elektronendefektstellen $\square(e^-)$. Aus (1) und (2) folgt:

$$x_{\square(e^-)} \cdot x_{e_{(z)}} = K \quad (25a)$$

$$x_{\square(e^-)}^0 = x_{e_{(z)}}^0 = \sqrt{K} \quad (25b)$$

Durch den Einbau von Cr_2O_3 z. B. in CuO wird die Zahl der quasi-freien Elektronen gemäß der Umsetzungsgleichung



erhöht. Unter Beachtung der Neutralitätsgleichung

$$x_{e_{(z)}} = x_{\square(e^-)} + x_{\text{Cr}^{3+}} \quad (27)$$

folgt das Leitfähigkeitsverhältnis der Mischphase κ zur reinen CuO-Phase κ^0

$$\frac{\kappa}{\kappa^0} = \frac{x_{\square(e^-)}}{2 x_{\square(e^-)}^0} + \frac{x_{e_{(z)}}}{2 x_{e_{(z)}}^0} = \sqrt{\left(\frac{x_{\text{Cr}^{3+}}}{2 x_{e_{(z)}}^0} \right)^2} + 1 \quad (28)$$

¹⁰⁾ C. Wagner u. K. E. Zimens, Acta chem. scand. **1**, 547 (1948).

^{10a)} Vgl. u. a. W. Schottky, Z. Elektrochem. **45**, 33 (1939).

Während durch einen Zusatz von Cr_2O_3 die Gittereigenhalbleitung des CuO zugunsten einer Elektronenüberschußleitung aufgegeben wird, muß bei einem Zusatz von Na_2O oder Li_2O das gittereigenhalbleitende CuO ein Elektronendefekt-leiter werden. Unter Beachtung der Neutralitätsbedingung

$$x_{\square}(\epsilon^-) = x_{e(z)} + x_{\text{Li}^+} \quad (29)$$

und der schon mehrfach diskutierten Massenwirkungsansätze folgt für das Leit-fähigkeitsverhältnis

$$\frac{\kappa}{\kappa^0} = \sqrt{\left(\frac{x_{\text{Li}^+}}{2 x_{e(z)}^0}\right)^2 + 1}. \quad (30)$$

Sowohl für $x_{\text{Cr}_2\text{O}_3} \gg x_{e(z)}^0$ als auch für $x_{\text{Li}_2\text{O}} \gg x_{\square}(\epsilon^-)$ folgt aus (28) wie aus (30)

$$\left(\frac{\kappa}{\kappa^0}\right)_{\text{CuO/Cr}_2\text{O}_3} \cong \frac{x_{\text{Cr}^{++}}}{2 x_{e(z)}^0} \quad (31a)$$

$$\left(\frac{\kappa}{\kappa^0}\right)_{\text{CuO/Li}_2\text{O}} \cong \frac{x_{\text{Li}^+}}{2 x_{e(z)}^0}, \quad (31b)$$

d. h. Halbleiter mit Gittereigenhalbleitung zeigen sowohl bei Zusätzen höherer wie niedriger Oxyde eine Leitfähigkeitszunahme. Dies dürfte als ein recht sicheres Kriterium angesehen werden, um Halbleiter mit Eigenhalbleitung von Elektronen-defekt- und Elektronenüberschußleitern unterscheiden zu können. Die experimen-tellen Ergebnisse werden demnächst an anderer Stelle veröffentlicht.

3. Zundervorgänge an Metall-Legierungen mit elektronenleitenden Deckschichten

Aus der allgemeinen Gleichung der Zundertheorie nach C. Wagner¹¹⁾ lassen sich die Teilleitfähigkeiten der Kationen bzw. Anionen in elektronenleitenden Phasen und deren Beeinflussung durch höher- oder niederwertige Kationen in Mischphasen-Deckschichten aus der Zundergeschwindigkeit berechnen¹²⁾. Be-deuten dn/dt irgendwie transportierte Stoffmenge in Äquivalenten/sec., n_1 , n_2 und n_3 die Überführungszahlen der Kationen, Anionen und Elektronen, ϵ die Elementarladung, κ die elektrische Leitfähigkeit in $\text{Ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ und μ_x das chemische Potential des Metalloids mit den Indices (i) als Grenzfläche Metall/Deck-schicht und (a) Deckschicht/Gasatmosphäre, dann gilt

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{transp.}} = \frac{q}{\Delta\xi} \cdot \frac{300}{96500} \cdot \frac{1}{N\epsilon} \int_{\mu_x^{(i)}}^{\mu_x^{(a)}} (n_1 + n_2) n_3 \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \mu_x}{|z_2|}, \quad (32)$$

wobei q die Oberfläche in cm^2 und $\Delta\xi$ die Schichtdicke in cm ist. Weiterhin be-deutet z_2 die Wertigkeit des Metalloids.

¹¹⁾ C. Wagner, Z. physik. Chem. (B) **21**, 25 (1933); **32**, 447 (1936); C. Wagner u. K. Grünwald, Z. physik. Chem. (B) **40**, 455 (1938); C. Wagner, J. Corrosion **5**, Nr. 5 (1948); K. Hauffe, Metalloberfl. **3A**, 213 (1949); Z. Metallkde. im Druck.

¹²⁾ Unter Zundergeschwindigkeit wollen wir hier ganz allgemein die Geschwindigkeit der Oxydation, der Schwefelung, Arsenierung und Halogenierung von Metallen und Metallegierungen bei höheren Temperaturen verstehen.

Durch Anwendung des Verlaufs der elektrischen Leitfähigkeit an oxydischen Mischphasen können wir nach der Wagnerschen Zundertheorie gemäß der allgemeinen Formel (32) die Legierungspartner zum Grundmetall so wählen, daß wir einmal eine Erhöhung und zum anderen eine Erniedrigung der Zundergeschwindigkeit erhalten. Im Falle der Entwicklung einer zunderfesten Legierung ist die Zusatzkomponente eines binären Legierungssystems so zu wählen, daß die Störstellenkonzentration der für den zeitlichen Ablauf der Zunderung maßgebenden Ionen- bzw. Elektronenfehlordnungsstellen herabgesetzt wird. D. h. im Falle eines Zundersystems mit einer praktisch elektronenleitenden Deckschicht muß die Konzentration der fehlgeordneten Ionen und im Falle eines Zundersystems mit einer ionenleitenden Deckschicht die Konzentration der fehlgeordneten Elektronen vermindert werden¹³⁾. Aus diesem Grunde erscheint es zweckmäßig, die Zundersysteme nicht nach chemischen Gesichtspunkten, wie Oxydation, Schwefelung, Halogenierung, Arsenierung usw. von Metallen und Metallegierungen, zu unterteilen, sondern vielmehr die Einteilung der Zundersysteme nach dem sich aus den Wagnerschen Fehlordnungsbildern ergebenden maßgebenden Teilvorgängen vorzunehmen. Dies sind aber häufig die Diffusionsvorgänge durch die jeweilige Zunderschicht, die einmal eine bevorzugte Ionen- und zum anderen eine bevorzugte Elektronenleitfähigkeit aufweisen kann. In einer allgemeineren und umfassenderen Einteilung der Zundervorgänge schlagen wir daher vor, stets von Zundersystemen mit elektronenleitenden und ionenleitenden Deckschichten zu sprechen. Im Rahmen dieser Abhandlung seien nur Zundersysteme mit elektronenleitenden Deckschichten behandelt.

Unter den speziellen Gesichtspunkten dieser Arbeitshypothese wurde von C. Wagner und K. E. Zimens¹⁴⁾ die Oxydationsgeschwindigkeit von Nickel-Chrom- und Nickel-Manganlegierungen untersucht. Hier wurde entsprechend den Erwartungen der Theorie eine Zunahme der Oxydationsgeschwindigkeit mit steigendem Gehalt an Chrom und Mangan gefunden. Dies steht in Übereinstimmung mit den Leitfähigkeitsmessungen an $\text{NiO}-\text{Cr}_2\text{O}_3$ von K. Hauffe und A. L. Vierk, die bei steigenden Zusätzen von Cr_2O_3 zu NiO eine starke Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit fanden. Ohne auf die quantitativen Zusammenhänge im einzelnen einzugehen, wollen wir als weiteres Beispiel ein von Ch. Gensch und K. Hauffe¹⁵⁾ untersuchtes Zundersystem mit überschußelektronenleitender Deckschicht behandeln. Auf Grund der Leitfähigkeitsmessungen an Mischoxyden müssen wir hier gerade umgekehrte Verhältnisse erwarten wie bei einem Zundersystem mit defektelektronenleitender Deckschicht. D. h. bei der Oxydation von Zink, dessen Oxyd ein Elektronenüberschußleiter ist, muß bei einem Zusatz von Aluminium zum Zink und damit von Al_2O_3 in der ZnO -Zunderschicht gemäß den Gln. (12) und (14) die Konzentration der wanderungsfähigen Zinkionen auf Zwischengitterplätzen und damit die Zinkionenteil leitfähigkeit $\kappa_{\text{Zn}^{2+}}$ herabgesetzt werden. Dies hat gemäß der Wagnerschen Zunderformel (32) unmittelbar zur Folge, daß die Oxydationsgeschwindigkeit ebenfalls herabgesetzt werden muß. Von uns ausgeführte Zunderversuche an reinem Zink und Zink-Aluminiumlegierungen brachten die Bestätigung. Während an spektralreinen Zinkproben die Oxydationsgeschwindigkeitskonstante in Luft bei 380°C $0,7-1,0 \cdot 10^{-9} \text{ g}^2 \cdot$

¹³⁾ Ch. Gensch u. K. Hauffe, Z. physik. Chem. **195**, 116 (1950); **195**, 386 (1950).

¹⁴⁾ C. Wagner u. K. E. Zimens, Acta chem. scand. **1**, 547 (1948).

¹⁵⁾ Ch. Gensch u. K. Hauffe, Z. physik. Chem. im Druck.

$\text{cm}^{-4} \cdot \text{h}^{-1}$ beträgt, wird die Oxydationsgeschwindigkeitskonstante einer Zink-Aluminiumlegierung mit 0,5 bzw. 1,0 Atom% Al unter den gleichen Versuchsbedingungen $< 10^{-11}$. Eine quantitative Verfolgung der Abnahme der Oxydationsgeschwindigkeit mit steigendem Al-Gehalt ist infolge der geringen Geschwindigkeiten, die schon bei kleinen Zusätzen (0,1 Atom%) an Al aufzutreten, nicht möglich. Im Gegensatz hierzu brachte ein Legieren des Zinks mit Lithium eine Zunahme der Oxydationsgeschwindigkeit gegenüber reinem Zink. Die Oxydationsgeschwindigkeitskonstante betrug hier unter den gleichen Versuchsbedingungen wie oben für eine Zn—Li-Legierung mit 0,4 Atom% Li $2 \cdot 10^{-7}$.

Abschließend darf man wohl sagen, daß man mittels der Wagner-Schottkyschen Fehlordnungstheorie heute in der Lage ist, mit ganz neuen Gesichtspunkten an die Entwicklung von Halbleitern mit definierten elektrischen Eigenschaften heranzugehen. Ferner ist die Entwicklung zunderfester Metallegierungen in ein ganz neues Stadium getreten, als man heute die Zu- und Abnahme der Oxydations- bzw. Halogenierungs- bzw. Schwefelungsgeschwindigkeit modellmäßig beherrscht oder wo dies nicht der Fall ist, leicht das experimentelle Material heranschaffen kann. Des weiteren bietet der heutige Stand der Fehlordnungstheorie ganz neue Wege, um das Problem des Brennstoffelementes wieder zu bearbeiten.

Greifswald, Phys.-chem. Abtl. des Chemischen Institutes der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 8. August 1950.)

Flächengrößen und elektrodynamische Grenzbedingungen bei bewegten Körpern

Von H. Epheser und T. Schlomka

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es werden zunächst vierdimensionale Darstellungen gegeben für folgende Größen: den synchron gemessenen Raumabstand von 2 Punkten des bewegten Körpers, das synchron gemessene Körper-Flächenelement, den Flächennormalen-Einheitsvektor, die Flächenladungs- und die Flächenstromdichte, sowie die Flächen-Leitungsstromdichte; dabei tritt ein neuer Relativitätsfaktor $k_n = \left(1 - \frac{(u \cdot n)^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ auf. Dann wird gezeigt, wie man die elektrodynamischen Grenzbedingungen bei bewegten Körpern erhält durch Anwendung der allgemeinen Lorentztransformation auf die im Körper-Ruhsystem geltenden dreidimensionalen Grenzbedingungen oder einfacher durch eine vierdimensionale Formulierung dieser elektrodynamischen Grenzbedingungen.

§ 1. Einleitung

Für eine demnächst erscheinende Arbeit über „Die verschiedenen Formen der elektrodynamischen Grund-, Material- und Grenzflächen-Gleichungen bei bewegten Körpern“ benötigen wir Ableitungen der elektrodynamischen Grenzbedingungen, die von den bereits vorliegenden Ableitungen^{1) 2)} abweichen: Wir brauchen entweder eine Ableitung über die vierdimensionale Formulierung der Grenzbedingungen oder eine Ableitung durch unmittelbare Anwendung der allgemeinen Lorentztransformation auf die die im Körper-Ruhsystem geltenden dreidimensionalen Grenzbedingungen.

Der Gedanke, auf diese Weise die Grenzbedingungen bei bewegten Körpern zu berechnen, ist nicht neu: Auf die Anwendung der Lorentztransformation wiesen schon 1921 Pauli³⁾ und 1927 Thirring⁴⁾ hin, und eine vierdimensionale Formulierung der Grenzbedingungen gab bereits 1928 Frenkel⁵⁾. Zur Durchführung dieses Gedankens benötigt man aber die Transformationsformeln für den Grenzflächen-Normalenvektor n und für die Flächenladungsdichte σ sowie für die Flächenstromdichte g . Diese Transformationsgleichungen liegen aber

¹⁾ A. Einstein u. J. Laub, Ann. Physik (4) **28**, 445 (1909); M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, 1. Bd., 4. Aufl., S. 177/179 (1921).

²⁾ T. Schlomka, Ann. Physik (6) **5**, 190 (1949/50). Die linken Seiten der dortigen Gln. (13; 14) sind der hiesigen Gln. (53; 58) wegen noch mit k_n zu multiplizieren.

³⁾ W. Pauli, Encykl. d. Math. Wissensch. Bd. V², S. 659 (1921).

⁴⁾ H. Thirring, Handbuch der Physik **12**, 331 (1927).

⁵⁾ J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik, 2. Bd., S. 18 (1928).

bisher noch nicht vor. Wir geben daher zunächst in den §§ 2 und 3 Ableitungen dieser und damit zusammenhängender Transformationsformeln und bringen dann in den §§ 4 und 5 die beiden neuen Grenzbedingungs-Ableitungen. In einem Anhang werden schließlich 2 oft in der Arbeit benutzte bekannte Sätze wiedergegeben.

§ 2. Transformationsformeln für einige geometrische Größen

S^0 sei ein im Körper festes „Ruhsystem“; es bewege sich mit der beliebig gerichteten Translationsgeschwindigkeit u dem „ruhenden“ Beobachtersystem S gegenüber. S' sei ein „bewegtes“ Beobachtersystem, das S gegenüber die beliebig gerichtete Geschwindigkeit v hat. \mathfrak{R} sei der in S synchron gemessene Abstand von 2 Körperpunkten P_1 und P_2 , $d\vec{\eta} = d\mathfrak{R}_1 \times d\mathfrak{R}_2$ ein in S synchron gemessenes gerichtetes Flächenelement und $\mathfrak{n} = d\vec{\eta}/d\mathfrak{f}$ ein Flächennormalen-Einheitsvektor in S . Wir fragen nach den Transformationsgleichungen für diese Größen. Abkürzungen:

$$k = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad k' = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad (1; 2)$$

$$k^* = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad k_n = \left(1 - \frac{(u \cdot \mathfrak{n})^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3; 4)$$

Zwischen den ersten 3 Größen besteht nach dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten die Beziehung:

$$k' = k k^* \left(1 - \frac{u \cdot v}{c^2}\right). \quad (5)$$

a) Der Abstandsvektor \mathfrak{R}

Wenn der Körper dem System S gegenüber mit u bewegt wird, so erfährt die zu u parallele Komponente von \mathfrak{R}^0 , d. h. $\left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u}$, die Lorentzkontraktion, wird also verkürzt auf $\left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u} \cdot \frac{1}{k}$, während die zu u senkrechte Komponente von \mathfrak{R}^0 , d. h. $\mathfrak{R}^0 - \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u}$, unverändert bleibt. Man liest daher aus Abb. I eine bekannte⁶⁾ Gleichung ab:

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u} \cdot \frac{1}{k} + \left\{ \mathfrak{R}^0 - \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u} \right\} = \mathfrak{R}^0 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u}, \quad (6)$$

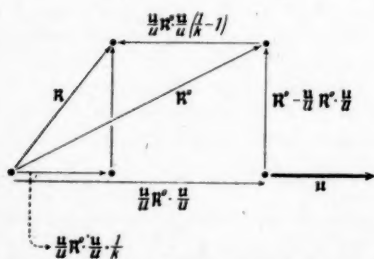


Abb. 1. Zur Ableitung der Transformationsformel für \mathfrak{R}

hat also

$$k \mathfrak{R} = k \mathfrak{R}^0 + (1 - k) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0\right) \frac{u}{u}. \quad (7)$$

Vektorproduktbildung von (7) mit u/c gibt:

$$k \mathfrak{R} \times \frac{u}{c} = k \mathfrak{R}^0 \times \frac{u}{c}. \quad (8)$$

Aus dem Ansatz

$$(R^i k)^0 = (0; \mathfrak{R}^0) \quad (9)$$

⁶⁾ W. v. Ignatowsky, Archiv d. Math. u. Physik (3) 17, 17 (1911).

folgt nun nach Satz B (siehe Anhang):

$$R^{ik} = \left\{ k \mathfrak{R}^0 \times \frac{u}{c}; k \mathfrak{R}^0 + (1-k) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0 \right) \frac{u}{u} \right\}. \quad (10)$$

Aus (10; 8; 7) ersieht man, daß $k \mathfrak{R}$ zusammen mit $k \mathfrak{R} \times \frac{u}{c}$ einen antisymmetrischen Strecken-Vierertensor bildet:

$$R^{ik} = \left(k \mathfrak{R} \times \frac{u}{c}; k \mathfrak{R} \right). \quad (11)$$

Aus (11) und Satz B (97) folgt als Umkehrgleichung von (6):

$$\mathfrak{R}^0 = \mathfrak{R} - (1-k) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R} \right) \frac{u}{u}. \quad (12)$$

Durch Quadrieren von (6) bzw. (12) erhält man die bekannten⁷⁾ Beziehungen:

$$R^2 = R^{02} - \left(\frac{u}{c} \mathfrak{R}^0 \right)^2 \quad (13)$$

bzw.

$$R^{02} = R^2 + k^2 \left(\frac{u}{c} \mathfrak{R} \right)^2. \quad (14)$$

Aus (11) und Satz B (97) folgt:

$$k' \mathfrak{R}' = k^* \left\{ k \mathfrak{R} - \frac{v}{c} \times \left[k \mathfrak{R} \times \frac{u}{c} \right] \right\} + (1-k^*) \left(\frac{v}{v} \cdot k \mathfrak{R} \right) \frac{v}{v} \quad (15)$$

und hieraus mit (5) die bekannte⁸⁾ Gleichung:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + \frac{\left(\frac{v}{v} \mathfrak{R} \right) \frac{u}{c}}{1 - \frac{uv}{c^2}} + \frac{(1-k^*) \left(\frac{v}{v} \mathfrak{R} \right) \frac{v}{v}}{k^* \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right)}. \quad (16)$$

In der Geometrie des dreidimensionalen Raumes ist der Abstand \mathfrak{R} ein Raumvektor und das Flächenelement $d\mathfrak{f}$ ein schiefsymmetrischer Raumtensor; es befremdet daher zunächst, daß in der vierdimensionalen Welt gewissermaßen umgekehrt $k \mathfrak{R}$ nach (11) Bestandteil eines schiefsymmetrischen Welttensors und $k d\mathfrak{f}$ nach (31) Bestandteil eines Weltvektors ist. Wir geben daher zur Klärung der hier vorliegenden Verhältnisse noch eine zweite Herleitung von (6) und damit von (11).

Der Vierervektor $x^i = (r; ct)$ gibt bekanntlich die 4 Koordinaten eines Raumpunktes. Bilden wir nun die Differenzen

$$(x_{(2)}^i)^0 - (x_{(1)}^i)^0 = \{r_2^0 - r_1^0; c(t_2^0 - t_1^0)\} = \{\mathfrak{R}_*^0; c(t_2^0 - t_1^0)\} = (R_*^i)^0, \quad (17)$$

$$x_{(2)}^i - x_{(1)}^i = \{r_2 - r_1; c(t_2 - t_1)\} = \{\mathfrak{R}_*; c(t_2 - t_1)\} = R_*^i, \quad (18)$$

so sind die Größen $\mathfrak{R}_*^0 = r_2^0 - r_1^0$ bzw. $\mathfrak{R}_*^i = r_2 - r_1$ nicht die in S^0 bzw. S synchron gemessenen räumlichen Abstandsvektoren \mathfrak{R}^0 bzw. \mathfrak{R} von 2 Körperpunkten P_1 und P_2 . \mathfrak{R}_*^0 ist vielmehr der in S^0 gemessene Abstand von 2 in S^0 festen Raumpunkten r_1^0 und r_2^0 , an denen zu den Zeiten t_1^0 bzw. t_2^0 je ein Ereignis auftrat. Entsprechend ist \mathfrak{R}_*^i der in S gemessene Abstand von 2 in S festen Raumpunkten

⁷⁾ T. Levi-Civita, Ann. Physik (4) **32**, 237 (1910); W. v. Ignatowsky, Ann. Physik (4) **33**, 616 (1910).

⁸⁾ W. v. Ignatowsky, Archiv d. Math. u. Physik (3) **18**, 18 (1911).

\mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , an denen zu den Zeiten t_1 bzw. t_2 die eben erwähnten beiden Ereignisse auftraten. Den Zusammenhang zwischen \mathfrak{R} und \mathfrak{R}_* ersieht man unmittelbar aus Abb. 2:

Zur Zeit t_1 koinzidieren in S die beiden Körperpunkte P_1 bzw. P_2 mit den beiden Raumpunkten $P_1(t_1)$ bzw. $P_2(t_1)$; der Verbindungsvektor dieser beiden Raumpunkte ist also \mathfrak{R} . Der Körper bewegt sich nun S gegenüber mit der Geschwindigkeit u ; zur Zeit t_2 koinzidiert der Körperpunkt P_2 mit dem Raumpunkt $P_2(t_2)$; der Verbindungsvektor von $P_1(t_1)$ zu $P_2(t_2)$ ist also \mathfrak{R}_* . Es ist demnach

$$\mathfrak{R}_* = \mathfrak{R} + u(t_2 - t_1). \quad (19)$$

Mißt man nun in S^0 zur gleichen Zeit $t_1^0 = t_2^0$ den Abstand von P_1 und P_2 , so ist nach (17):

$$(R_*^i)^0 = \{r_2^0 - r_1^0; c(t_2^0 - t_1^0)\} = (\mathfrak{R}^0; 0). \quad (20)$$

Satz A gibt dann:

$$R_*^i = \left\{ \mathfrak{R}^0 - (1-k) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0 \right) \frac{u}{u}; k \left(\frac{u}{c} \mathfrak{R}^0 \right) \right\}. \quad (21)$$

Aus (18; 21) folgt:

$$\mathfrak{R}_* = \mathfrak{R}^0 - (1-k) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0 \right) \frac{u}{u}; \quad (22)$$

$$c(t_2 - t_1) = k \left(\frac{u}{c} \mathfrak{R}^0 \right). \quad (23)$$

(19; 22; 23) geben dann in Übereinstimmung mit (6):

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^0 - (1-k) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0 \right) \frac{u}{u} - u \cdot \frac{k}{c} \left(\frac{u}{c} \mathfrak{R}^0 \right) = \mathfrak{R}^0 - \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{u}{u} \mathfrak{R}^0 \right) \frac{u}{u}. \quad (24)$$

b) Der Flächenvektor $d\mathfrak{f}$ und sein Betrag

Für $d\mathfrak{f} = d\mathfrak{R}_1 \times d\mathfrak{R}_2$ gilt nach (6):

$$d\mathfrak{f} = \left\{ d\mathfrak{R}_1^0 - \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{u}{u} d\mathfrak{R}_1^0 \right) \frac{u}{u} \right\} \times \left\{ d\mathfrak{R}_2^0 - \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{u}{u} d\mathfrak{R}_2^0 \right) \frac{u}{u} \right\}. \quad (25)$$

Ausmultiplikation gibt bei Berücksichtigung der Formel

$$[[\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}] \times \mathfrak{D}] = [\mathfrak{B} \mathfrak{D}] \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{C} - [\mathfrak{A} \mathfrak{D}] \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{D} - [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{D} \quad (26)$$

und mit $d\mathfrak{R}_1^0 \times d\mathfrak{R}_2^0 = d\mathfrak{f}^0$:

$$k d\mathfrak{f} = d\mathfrak{f}^0 - (1-k) \left(\frac{u}{u} d\mathfrak{f}^0 \right) \frac{u}{u}. \quad (27)$$

Skalarproduktbildung mit u/c liefert:

$$k d\mathfrak{f} \frac{u}{c} = k d\mathfrak{f}^0 \frac{u}{c}. \quad (28)$$

Der Ansatz

$$(d\mathfrak{f}^i)^0 = (d\mathfrak{f}^0; 0) \quad (29)$$

führt nun nach Satz A zu:

$$d\mathfrak{f}^i = \left\{ d\mathfrak{f}^0 - (1-k) \left(\frac{u}{u} d\mathfrak{f}^0 \right) \frac{u}{u}; k d\mathfrak{f}^0 \frac{u}{c} \right\}. \quad (30)$$

Hieraus folgt mit (27; 28), daß $k d\vec{f}$ zusammen mit $k d\vec{f} \frac{u}{c}$ einen Flächen-Vierervektor bildet:

$$d\vec{f}^i = \left(k d\vec{f}; k d\vec{f} \frac{u}{c} \right). \quad (31)$$

Aus (31) und Satz A folgt die bekannte^{a)} Formel:

$$k' d\vec{f}' = k d\vec{f} - (1 - k^*) \left(\frac{v}{v} \cdot k d\vec{f} \right) \frac{v}{v} - k^* \left(k d\vec{f} \frac{u}{c} \right) \frac{v}{c}. \quad (32)$$

Quadrieren dieser Gleichung führt mit $d\vec{f} = n \cdot d\vec{f}$ zu:

$$k' d\vec{f}' = k d\vec{f} \sqrt{1 + \left(\frac{v-u}{c} n k^* \right)^2 - \left(\frac{u n}{c} \right)^2}. \quad (33)$$

Als Sonderfall erhält man hieraus:

$$k d\vec{f} = d\vec{f}^0 \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{u n^0}{c} \right)^2}. \quad (34)$$

e) Der Flächennormalen-Einheitsvektor n

Division von (32) durch (33) gibt für $n' = d\vec{f}'/d\vec{f}'$ mit $n = d\vec{f}/d\vec{f}$:

$$n' = \frac{n - (1 - k^*) \left(\frac{v}{v} n \right) \frac{v}{v} - k^* \left(\frac{u}{c} n \right) \frac{v}{c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v-u}{c} n k^* \right)^2 - \left(\frac{u n}{c} \right)^2}}. \quad (35)$$

Hieraus erhält man die Sonderfälle:

$$n = \frac{n^0 - (1 - k) \left(\frac{u}{u} n^0 \right) \frac{u}{u}}{\sqrt{1 + k^2 \left(\frac{u n^0}{c} \right)^2}}; \quad n^0 = \frac{n - \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{u}{u} n \right) \frac{u}{u}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u n}{c} \right)^2}}. \quad (36; 37)$$

Skalarproduktbildung von (37) mit u/c führt zu:

$$1 + k^2 \left(\frac{u n^0}{c} \right)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{u n}{c} \right)^2} = k_n^2. \quad (38)$$

(36) gibt mit (38):

$$k_n n = n^0 - (1 - k) \left(\frac{u}{u} n^0 \right) \frac{u}{u}. \quad (39)$$

Skalarproduktbildung mit u/c liefert:

$$k_n n \frac{u}{c} = k n^0 \frac{u}{c}. \quad (40)$$

Der Ansatz

$$(n^i)^0 = (n^0; 0) \quad (41)$$

führt nach Satz A zu

$$n^i = \left\{ n^0 - (1 - k) \left(\frac{u}{u} n^0 \right) \frac{u}{u}; k n^0 \frac{u}{c} \right\}. \quad (42)$$

Aus (42; 39; 40) folgt, daß $k_n n$ zusammen mit $k_n \frac{un}{c}$ einen Normalen-Vierervektor bildet:

$$n^i = \left(k_n n; k_n \frac{un}{c} \right). \quad (43)$$

Mit (38) vereinfachen sich (34; 37) zu:

$$k df = k_n df^0; \quad (44)$$

$$n^0 = k_n \left\{ n - \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{u}{c} n \right) \frac{u}{u} \right\}. \quad (45)$$

§ 3. Transformationsformeln für Flächenladungs- und Flächenstromdichte

a) Die Flächenladungsdichte σ

Die für S vorhandene Flächenladungsdichte σ besteht aus 3 Teilen:

1. Aus der Dichte σ_1 , die von der in S^0 vorhandenen, fest am Körper haftenden Flächenladungsdichte σ^0 herrührt; σ^0 kann in S^0 auch dann vorhanden sein, wenn dort kein Flächenstrom der Dichte g^0 fließt; σ^0 ist eben die in S^0 vorhandene Überschuß-Ladungsdichte.

2. Aus der Dichte $\sigma_2 = \sigma_L^{(S)}$, die herrührt von der in S^0 vorhandenen Dichte $\sigma_L^{(S^0)} < 0$ der die Flächenstromdichte g^0 bildenden Elektronen; diese Leitungselektronen haben in S^0 die mittlere, senkrecht zu n^0 liegende Geschwindigkeit q^0 ; es ist also

$$g^0 = \sigma_L^{(S^0)} q^0. \quad (46)$$

3. Aus der Dichte σ_3 , herrührend von den Metallgitterionen, die in S^0 die Dichte $\sigma_L^{(S^0)}$ der g^0 bildenden Leitungselektronen gerade neutralisieren (denn in S^0 gibt g^0 keine Überschußladung); es ist also in S^0 :

$$\sigma_3 = -\sigma_L^{(S^0)}. \quad (47)$$

Wir betrachten nun die Überschuß-Ladungsdichte σ^0 auf einem Flächenelement df^0 . Diese Ladung $\sigma^0 df^0$ ist eine Invariante; es gilt also:

$$\sigma^0 df^0 = \sigma_1 df = \sigma'_1 df'. \quad (48)$$

Hieraus folgen mit (44; 33; 5) als spezielle bzw. allgemeine Transformationsgleichungen:

$$\sigma_1 = \sigma^0 \frac{df^0}{df} = \sigma^0 \frac{k}{k_n}; \quad (49)$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 \frac{df}{df'} = \sigma_1 \frac{k^* \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{v-u}{c} n k^* \right)^2 - \left(\frac{un}{c} \right)^2}}. \quad (50)$$

σ_3 rührt ebenso wie σ_1 von fest am Körper haftenden Ladungen her; für σ_3 gilt also eine (49) entsprechende Gleichung; man hat daher bei Berücksichtigung von (47):

$$\sigma_3 = -\sigma_L^{(S^0)} \cdot \frac{k}{k_n}. \quad (51)$$

Zur Berechnung von σ_2 ist (50) zu verwenden mit $\sigma'_1 \rightarrow \sigma_2$, $\sigma_1 \rightarrow \sigma_L^{(S)}$, $u \rightarrow q^0$, $v \rightarrow -u$, $k^* \rightarrow k$ und $n \rightarrow n^0$; man erhält dann mit $q^0 n^0 = 0$ und Beachten von (38; 46):

$$\sigma_2 = \sigma_L^{(S)} = \sigma_L^{(S^0)} \frac{k \left(1 + \frac{u q^0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 + k^2 \left(\frac{u n^0}{c}\right)^2}} = \frac{k}{k_n} \left(\sigma_L^{(S^0)} + \frac{u g^0}{c^2}\right). \quad (52)$$

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ gibt also mit (49; 51; 52):

$$k_n \sigma = k \left(\sigma^0 + \frac{u g^0}{c^2}\right). \quad (53)$$

b) Die Flächen-Gesamtstromdichte g

Den Ausführungen einer demnächst erscheinenden Arbeit^{*)} über „Das Ohmsche Gesetz bei bewegten Körpern“ entsprechend setzt sich die für S vorhandene Flächenstromdichte g zusammen aus der Konvektionsstromdichte

$$g_K = \sigma u \quad (54)$$

und der Leitungsstromdichte

$$g_L = \sigma_L^{(S)} (q - u), \quad (55)$$

wobei die für S vorhandene mittlere Geschwindigkeit q der den Flächen-Leitungsstrom bildenden Elektronen gegeben ist durch:

$$q \cdot k \left(1 + \frac{u q^0}{c^2}\right) = q^0 - (1 - k) \left(\frac{u}{u} q^0\right) \frac{u}{u} + k u. \quad (56)$$

Aus (55; 52; 38; 56) folgt mit (46):

$$k_n g_L = g^0 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{u}{u} g^0\right) \frac{u}{u}. \quad (57)$$

$k_n g = k_n g_K + k_n g_L$ gibt nach (54; 53; 57):

$$k_n g = g^0 - (1 - k) \left(\frac{u}{u} g^0\right) \frac{u}{u} + k \sigma^0 u. \quad (58)$$

Aus dem Ansatz

$$(g^i)^0 = (g^0; c \sigma^0) \quad (59)$$

folgt nun nach Satz A:

$$g^i = \left\{ g^0 - (1 - k) \left(\frac{u}{u} g^0\right) \frac{u}{u} + k \sigma^0 u; c k \left(\sigma^0 + \frac{u g^0}{c^2}\right) \right\}. \quad (60)$$

Es bilden also nach (60; 58; 53) $k_n g$ und $c k_n \sigma$ einen Flächenstrom-Vierervektor:

$$g^i = (k_n g; c k_n \sigma). \quad (61)$$

Aus (61) und Satz A erhält man als Umkehrgleichungen von (58; 53):

$$g^0 = k_n \left\{ g - (1 - k) \left(\frac{u}{u} g\right) \frac{u}{u} - k \sigma u \right\}; \quad (62)$$

$$\sigma^0 = k k_n \left(\sigma - \frac{u g}{c^2}\right). \quad (63)$$

^{*)} T. Schlomka, Ann. Physik im Druck.

c) Die Flächen-Leitungsstromdichte g_L

Der Ansatz

$$(g_L^{ik})^0 = (0; -g^0) \quad (64)$$

führt nach Satz B zu:

$$g_L^{ik} = \left\{ \frac{u}{c} \times k g^0; -k g^0 - (1-k) \left(\frac{u}{u} g^0 \right) \frac{u}{u} \right\}. \quad (65)$$

Aus (57) folgt nun:

$$k k_n g_L = k g^0 + (1-k) \left(\frac{u}{u} g^0 \right) \frac{u}{u} \quad (66)$$

und hieraus durch Vektorproduktbildung mit u/c :

$$\frac{u}{c} \times k k_n g_L = \frac{u}{c} \times k g^0. \quad (67)$$

Nach (65 ... 67) gibt es also den schiefssymmetrischen Flächenleitungsstrom-Vierertensor:

$$g_L^{ik} = \left(\frac{u}{c} \times k k_n g_L; -k k_n g_L \right). \quad (68)$$

Es sei λ die elektrische Flächen-Leitfähigkeit, F^{ik} der Feldtensor ($c \mathfrak{B}$; $-\mathfrak{E}$) und $u_k = (k u; -k c)$ die kovariante Vierergeschwindigkeit; dann lautet das Ohmsche Gesetz für den Flächenstrom:

$$u_k g_L^{ik} = \lambda u_k (F^{ik} - n^i \cdot n_l F^{lk}). \quad (69)$$

Denn (69) ist eine Vierergleichung und gibt mit $i = 1, 2, 3$ das richtige dreidimensionale Ohmsche Flächenstrom-Gesetz für S^0 :

$$g^0 = \lambda (\mathfrak{E}^0 - n^0 \cdot n^0 \mathfrak{E}^0). \quad (70)$$

($i = 4$ gibt für S^0 die Identität $0 = 0$.)

Für S erhält man aus (69) mit $i = 1, 2, 3$ zunächst:

$$k k_n g_L + k k_n \frac{u}{c} \times \left[\frac{u}{c} g_L \right] = \lambda \left\{ \mathfrak{E} + [u \mathfrak{B}] - k_n^2 \left(n \left\{ \mathfrak{E} + [u \mathfrak{B}] - \frac{u}{c} \mathfrak{E} \cdot \frac{u}{c} \right\} \right) \right\} \quad (71)$$

und hieraus mit der Abkürzung

$$\mathfrak{E}^\times = \mathfrak{E} + [u \mathfrak{B}] - \frac{u}{c} \mathfrak{E} \cdot \frac{u}{c} : \quad (72)$$

$$k_n g_L = \lambda k \left\{ \mathfrak{E}^\times - n \cdot n \mathfrak{E}^\times - k_n^2 n \times \left[n \frac{u}{c} \right] \frac{u n}{c} n \mathfrak{E}^\times \right\}. \quad (73)$$

Die ersten beiden Summanden in der geschweiften Klammer geben die vektorielle Tangentialkomponente des auch im Ohmschen Gesetz für die räumliche Stromdichte⁹⁾ vorkommenden \mathfrak{E}^\times ; der dritte Summand ist wegen des $n \times \left[n \frac{u}{c} \right]$ ebenfalls ein Tangentialvektor. ($i = 4$ gibt für S lediglich das Skalarprodukt von (71) mit u .)

§ 4. Anwendung der allgemeinen Lorentztransformation auf die Grenzbedingungen in S^0

Bezeichnen wir mit n^0 den vom Medium (1) zum Medium (2) gerichteten Normalen-Einheitsvektor und mit $\Delta \mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}_2^0 - \mathfrak{F}_1^0$ den Sprung einer Feldgröße \mathfrak{F}^0

an der Grenzfläche, so lauten die (bekanntlich nicht voneinander unabhängigen) Grenzbedingungen in S^0 :

$$n^0 \times \Delta \mathfrak{F}^0 = g^0; \quad n^0 \Delta \mathfrak{D}^0 = \sigma^0; \quad (74; 76)$$

$$n^0 \times \Delta \mathfrak{E}^0 = 0; \quad n^0 \Delta \mathfrak{B}^0 = 0. \quad (75; 77)$$

Setzt man nun die Werte für n^0 , g^0 , σ^0 aus (45; 62; 63) und die bekannten¹⁰⁾ allgemeinen Transformationswerte für \mathfrak{E}^0 , \mathfrak{B}^0 , \mathfrak{D}^0 und \mathfrak{F}^0 in (74...77) ein, so erhält man die gesuchten Grenzbedingungen bei bewegten Körpern. Die dazu erforderlichen Rechnungen sind jedoch etwas umständlich. Wir sehen daher von ihrer Wiedergabe ab und begnügen uns mit dem Hinweis, daß die Gl. (74...77) nicht einzeln behandelt werden können, daß man vielmehr (74) zusammen mit (76) und (75) zusammen mit (77) behandeln und in beiden Fällen Formel (26) anwenden muß. Das Ergebnis der Rechnung lautet:

$$n \times (\Delta \mathfrak{F} - u \times \Delta \mathfrak{D}) = g - \sigma u; \quad n \Delta \mathfrak{D} = \sigma; \quad (78; 79)$$

$$n \times (\Delta \mathfrak{E} + u \times \Delta \mathfrak{B}) = 0; \quad n \Delta \mathfrak{B} = 0. \quad (80; 81)$$

Durch Auflösen der doppelten Vektorprodukte in (78; 80), Beachten von (79; 81) und Einführen der üblichen Symbole für den Flächenrotor ($\text{Rot } \mathfrak{F} \equiv n \times \Delta \mathfrak{F}$) und die Flächendivergenz ($\text{Div } \mathfrak{F} \equiv n \Delta \mathfrak{F}$) erhält man die Grenzbedingungen in der kürzlich von uns²⁾ auf andere Weise abgeleiteten Form:

$$\text{Rot } \mathfrak{F} = g + (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) u_{n,12}; \quad \text{Div } \mathfrak{D} = \sigma; \quad (82; 83)$$

$$\text{Rot } \mathfrak{E} = -(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) u_{n,12}; \quad \text{Div } \mathfrak{B} = 0. \quad (84; 85)$$

§ 5. Grenzbedingungen in vierdimensionaler Form

Bei Benützung der Vierergrößen [vgl. (59; 41)]

$$F_{ik}^0 = (c \mathfrak{B}^0; \mathfrak{E}^0), \quad H_{ik}^0 = (\mathfrak{F}^0; c \mathfrak{D}^0), \quad g_i^0 = (g^0; -c \sigma^0), \quad n_i^0 = (n^0; 0)$$

lassen sich⁵⁾ die Grenzbedingungen (74...77) darstellen in der Gestalt:

$$\Delta H_{ik}^0 (n^k)^0 = g_i^0; \quad \Delta F_{ik}^0 n_i^0 + \Delta F_{kl}^0 n_l^0 + \Delta F_{li}^0 n_k^0 = 0. \quad (86; 87)$$

Aus der Tensorform dieser Gleichungen folgt allgemein:

$$\Delta H_{ik} n^k = g_i; \quad \Delta F_{ik} n_l + \Delta F_{kl} n_i + \Delta F_{li} n_k = 0. \quad (88; 89)$$

Hieraus erhält man mit [vgl. (61; 43)]

$$F_{ik} = (c \mathfrak{B}; \mathfrak{E}), \quad H_{ik} = (\mathfrak{F}; c \mathfrak{D}), \quad g_i = (k_n g; -c k_n \sigma), \quad n^i = \left(k_n n; k_n \frac{u}{c} n \right)$$

durch Komponenten-Ausrechnung unmittelbar die Gleichungen

$$n \times \Delta \mathfrak{F} = g - \Delta \mathfrak{D} \cdot u n; \quad n \Delta \mathfrak{D} = \sigma; \quad (90; 91)$$

$$n \times \Delta \mathfrak{E} = +\Delta \mathfrak{B} \cdot u n; \quad n \Delta \mathfrak{B} = 0, \quad (92; 93)$$

in voller Übereinstimmung mit der obigen Darstellung (82...85).

¹⁰⁾ Siehe z. B. T. Schlomka, Ann. Physik (6) 7, 229 (1950). Von den dortigen Gln. (2...5) sind die Umkehrgleichungen zu nehmen und der hiesigen Bezeichnungsweise entsprechend das dortige v durch u zu ersetzen. Die linken Seiten der dortigen Gln. (15; 17) sind übrigens auf Grund der hiesigen Gln. (58; 53) noch mit k_n zu multiplizieren.

Anhang

Satz A: Gegeben sei im System S ein kontravarianter Vierervektor $m^i = (3; p)$; in einem System S' , das S gegenüber die beliebig gerichtete Geschwindigkeit \mathbf{v} hat, sind dann die Komponenten von $m'^i = (3'; p')$ mit $k^* = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben durch:

$$3' = 3 - (1 - k^*) \left(\frac{\mathbf{v}}{v} 3 \right) \frac{v}{v} - k^* p \frac{v}{c}; \quad p' = k^* \left(p - \frac{v}{c} 3 \right). \quad (94; 95)$$

Satz B: Gegeben sei im System S ein kontravarianter antisymmetrischer Vierertensor (Sechservektor) $V^{ik} = (\mathfrak{D}; \mathfrak{U})$; in einem System S' , das S gegenüber die beliebig gerichtete Geschwindigkeit \mathbf{v} hat, sind dann die Komponenten von $V'^{ik} = (\mathfrak{D}'; \mathfrak{U}')$ mit $k^* = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben durch:

$$\mathfrak{D}' = k^* \left(\mathfrak{D} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{U} \right) + (1 - k^*) \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \mathfrak{D} \right) \frac{v}{v}; \quad (96)$$

$$\mathfrak{U}' = k^* \left(\mathfrak{U} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{D} \right) + (1 - k^*) \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \mathfrak{U} \right) \frac{v}{v}. \quad (97)$$

Hannover, Ferdinand-Wallbrecht-Str. 30 und Wilhelm-Busch-Str. 7.

(Bei der Redaktion eingegangen am 22. September 1950.)

**Nachtrag zu meiner
„Bemerkung zur klassischen Elektronentheorie“
Ann. Physik (6) 4, 331–334 (1949)**

Von Erich Kretschmann

Leider habe ich erst kürzlich bemerkt, daß J. Frenkel, Z. Physik **32**, 518 bis 534 bereits im Jahre 1925 (l. c. S. 530 ff.) auf die Möglichkeit hingewiesen hat, den Energiesatz durch punktförmige Elektronen ohne elektromagnetische Eigenenergie in der Weise zu erfüllen, wie es meine „Bemerkung“ von 1949 wieder angibt.

Halle (Saale), Institut für theoretische Physik.

(Bei der Redaktion eingegangen am 21. September 1950.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74
für den Anzeigenteil: Ernst Wöllnitz (Arbeitsgemeinschaft medizinischer Verlage G. m. b. H.),
Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 52 20 97. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 1
Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63 105, 63 110
(1) Paul Dönhaupt, Köthen L 305/50 Lizenz-Nr. 410 / G. N. 44

p);
it v
)-i

95)

cher
ber
von

(96)

(97)

8 lin
hat
gen
eder

g 70
S. H. 4
Nr.
537
N. 48